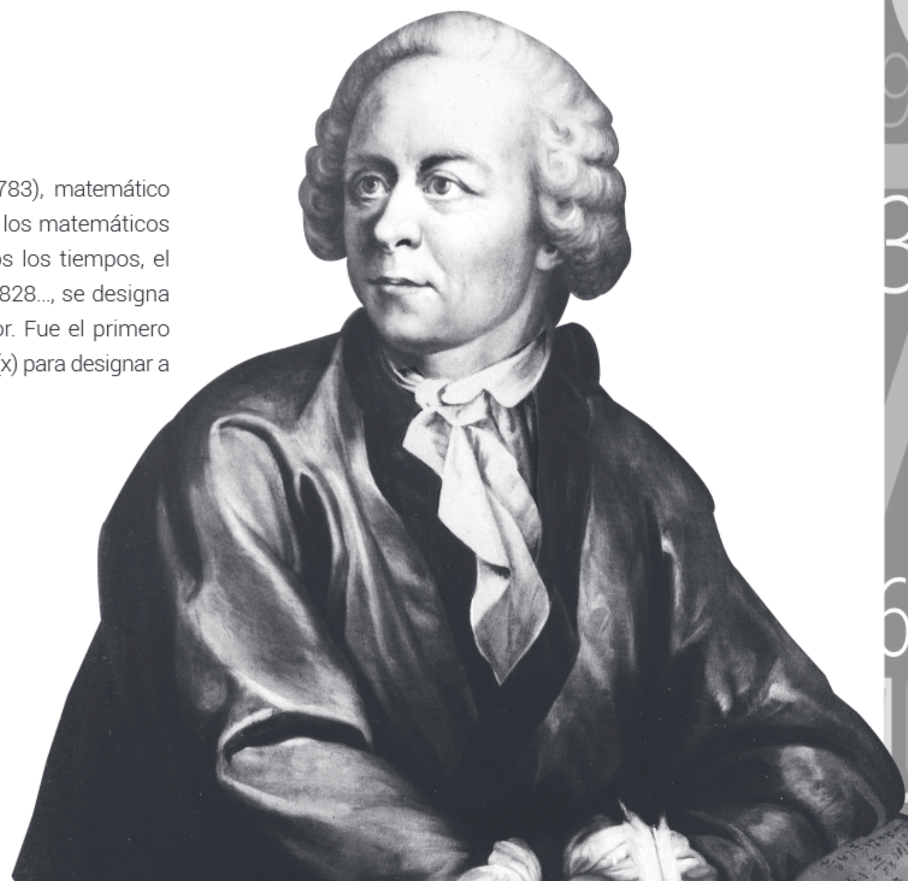
Capítulo
9

FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN

Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suizo, considerado uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, el número irracional e=2,71828..., se designa con esta letra en su honor. Fue el primero en introducir la notación f(x) para designar a las funciones.



CONCEPTOS CLAVES

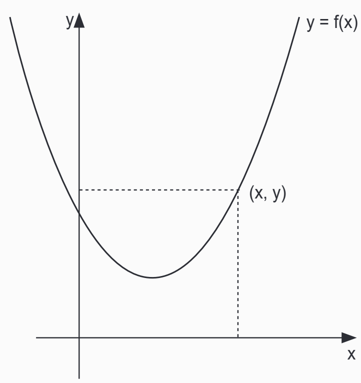
- Dominio y recorrido
- Imágenes y preimágenes
- Función lineal
- Función afín
- Gráficos de función lineal y afín

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función f definida de A a B relaciona los elementos de A con los de B, de modo que

(1) Todo elemento de A está relacionado con un elemento de B.
(2) Todo elemento de A se relaciona con un único elemento de B.

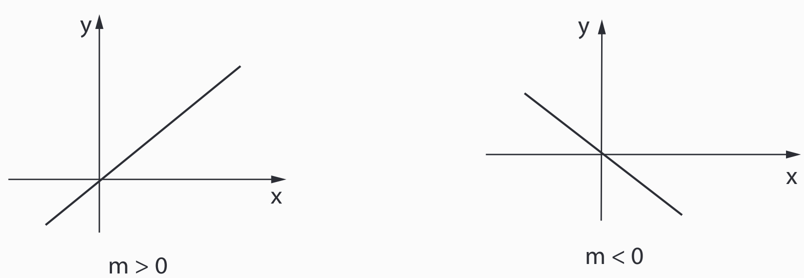
A se denomina el conjunto de partida y B el conjunto de llegada, al elemento del conjunto de partida se llama preimagen y al elemento con que se relaciona de B se llama imagen y se designa con la letra y.
Si la función la designamos con la letra f, entonces la notación y = f(x) hace alusión que "y" es la imagen de "x" (o que "x" es la preimagen de "y"). El conjunto de las preimágenes se llama dominio y el conjunto de las imágenes se llama recorrido.
En un sistema cartesiano, la imagen la pondremos en el eje vertical o eje de las ordenadas y la preimagen en el eje horizontal o eje de las abscisas.



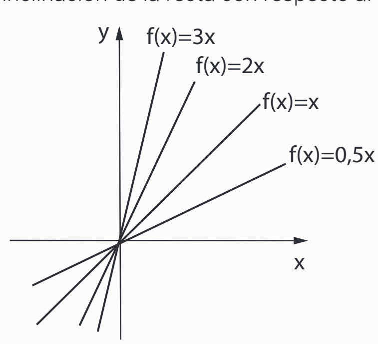
El gráfico de la función está formado por puntos (x,y) donde y = f(x).

FUNCIÓN LINEAL

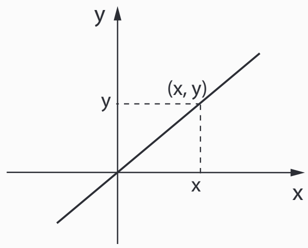
Es de la forma f(x) = mx, donde $m \neq 0$, su gráfica es una recta que pasa por el origen y m es la pendiente de esta recta, la cual indica la inclinación de la recta:



Si m > 0, la función es creciente, es decir a mayor "x" mayor "y", si m < 0, la función es decreciente, a mayor "x" menor "y".
Observa que a mayor pendiente, la inclinación de la recta con respecto al eje x es mayor:



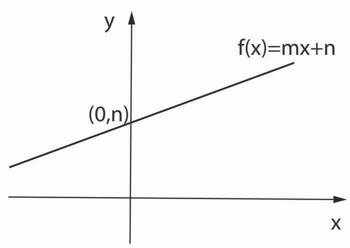
Observación: en una función lineal, la relación entre las variables corresponde a una proporcional directa:



Para todo punto (x, y), excepto el (0, 0) se cumple que $\frac{y}{x} = k$, donde k es una constante que coincide con la pendiente m.

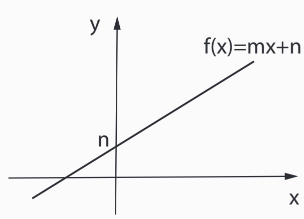
FUNCIÓN AFÍN

Es de la forma f(x) = mx + n, donde m al igual que en la función lineal, corresponde a la pendiente y n es el coeficiente de posición, donde (0, n) es el punto donde la recta intersecta al eje y.

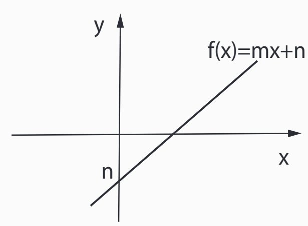


- **Gráfico de la función afín**

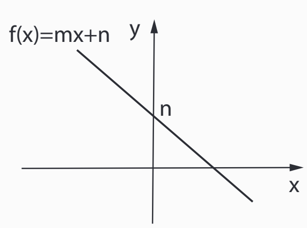
  Gráficamente, en la función afín podemos tener las siguientes situaciones:



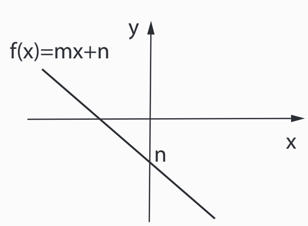
$m > 0$
$n > 0$



$m > 0$
$n < 0$



$m < 0$
$n > 0$



$m < 0$
$n < 0$

- **Determinación de la función afín dados dos puntos de su gráfica**

  Supongamos que tenemos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la gráfica de una función afín, podemos determinar la pendiente de su gráfica, a través de la expresión:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Posteriormente podemos encontrar la función a través de la fórmula:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad \text{(ecuación punto-pendiente)}$$

Este método lo ocuparemos en el ejercicio resuelto 4.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$, ¿cuál es la preimagen del 10?

Solución:

Como $f(x) = 10$, planteamos la ecuación $10 = \frac{2}{3}x - 2$, despejando "x" obtenemos $12 = \frac{2}{3}x \rightarrow x = 18$, por lo que la preimagen del 10 es 18.

2. En un estanque hay 1.800 litros y una bomba extrae 60 litros por minuto, determina el modelo que describe la cantidad C(t) de litros que hay en el estanque después de t minutos que se activa la bomba.

Solución:

Como en un incicio hay 1.800 litros, por cada minuto que pasa la bomba saca 60 litros del estanque, luego a los "t" minutos extraerá 60t litros, entonces la función que modela la cantidad de litros que queda en el estanque es $C(t) = 1.800 - 60t$

3. Un modelo para la temperatura T, en grados Celcius (°C), de un líquido está dada por $T(t) = 80 - 2t$, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 12 minutos la temperatura del líquido será de 56 °C.

B) Para que la temperatura del líquido llegue a 0° C se requieren más de 30 min.

C) A los 20 minutos la temperatura habrá bajado a la mitad.

D) La temperatura aumenta a razón de 2 °C por minuto.

Solución:

En A) si reempazamos t = 12 en la función obtenemos $T(12) = 80 - 2 \cdot 12 = 56$ °C, luego es A) es correcta.

En B) igualemos T(t) a cero, con lo que llegamos a la ecuación $T(t) = 80 - 2t = 0 \rightarrow t = 40'$, luego B) es verdadera.

Al inicio, es decir para t = 0, la temperatura era $T(0) = 80 - 2 \cdot 0 = 80$ °C y a los 20 minutos la temperatura era $T(20) = 80 - 2 \cdot 20 = 40$ °C, luego C) es verdadera.

Si analizamos la función dada $T(t) = 80 - 2t$, tenemos que su pendiente es -2, lo que indica que la variable dependiente, la temperatura, baja 2 °C por cada minuto, por lo tanto D) es FALSA.

4. Un técnico cobra un costo fijo por la visita a domicilio más un cierto valor por hora trabajada.
Se sabe que por 3 horas cobra $57.000 y por 4 horas $72.000.
Determina la función que modela el costo según la cantidad x de horas trabajadas.

Solución:

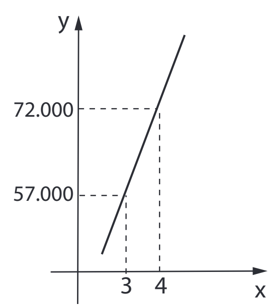
pongamos que por la visita a domicilio cobra $a y que cobra $b por cada hora de trabajo, entonces el costo por t horas de trabajo está dado por la función $C(t) = a + bt$.

Tenemos que para 3 horas cobra $57.000, entonces $a + 3b = 57000$, por 4 horas cobra $72.000, entonces $a + 4b = 72.000$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} a + 3b = 57000 \\ a + 4b = 72000 \end{array}\right|$, obtenemos que $b = 15.000$ y $a = 12.000$, luego la función que determina el costo a cancelar por x horas de trabajo es $C(x) = 12000 + 15000x$.

Otra forma de hallar la función es ocupar la ecuación punto-pendiente.

Tenemos la siguiente situación:



Como la gráfica pasa por los puntos (3, 57000) , (4, 72000), primero calculamos la pendiente de la gráfica utilizando la expresión: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, en este caso obtenemos: $m = \dfrac{72000 - 57000}{4 - 3} = \dfrac{15000}{1} = 15000$, ahora utilizamos la ecuación punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$, reemplazando tenemos que $y - 57000 = 15000(x - 3)$, desarrollando y despejamos "y" se tiene: $y = 15000x + 12000$, luego la función pedida es $C(x) = 15000x + 12000$, la misma que obtuvimos con el método anterior.

9

5. Sea la función definida en los reales, mediante $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2x + 5$, entonces $f(x) =$

A) $6x - 7$
B) $6x + 1$
C) $6x + 3$
D) $6x + 5$

Solución:

Lo que haremos para resolver esta situación es hacer un cambio de variable. Para ello a la expresión $\frac{x+2}{3}$ la designaremos con una nueva letra, por ejemplo u, entonces: $u = \frac{x+2}{3}$, en esta ecuación despejamos x, con lo que obtenemos $x = 3u - 2$, entonces la expresión dada $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2x + 5$, se transforma en

$f(u) = 2(3u - 2) + 5$, desarrollando y reduciendo términos, obtenemos $f(u) = 6u + 1$, ahora cambiamos "u" por "x"

y obtenemos finalmente que $f(x) = 6x + 1$, alternativa B).

6. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x + 2) = 2f(x) + 5$. Si $f(6) = 59$, entonces $f(0) =$

Solución:

Como acá no tenemos explícitamente la función f, lo que haremos es darnos diversos valores para "x" de modo de relacionar las preimágenes 0 y 6.

Si nos damos el valor $x = 4$, en la expresión dada podemos formar al lado izquierdo $f(6)$ cuyo valor conocemos, entonces:

(1) Si $x = 4 \rightarrow f(6) = 2f(4) + 5$
(2) Si $x = 2 \rightarrow f(4) = 2f(2) + 5$
(3) Si $x = 0 \rightarrow f(2) = 2f(0) + 5$

En (1) reemplazamos $f(6)$ por 59 y despejamos $f(4)$ lo cual nos da 27, reemplazamos $f(4) = 27$ en (2) y despejamos $f(2)$ lo que da 11, reemplazando $f(2) = 11$ en (3), despejamos $f(0)$ y obtenemos 3.
Respuesta $f(0) = 3$