Capítulo 8

PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

Como veremos en el presente capítulo, la regla de tres es de suma importancia para resolver problemas relacionados con proporcionalidad directa, inversa y porcentajes.
Esta regla se conoció en Occidente a través de los árabes, entre ellos los autores al-Jwarizmi en su Álgebra (ver referencia del cap. 4) y en Al-Biruni el que le dedicó una obra completa a este tema.
Se sabe que en la India utilizaron la regla de tres, pero según algunos autores, probablemente fue en China el primer lugar donde se resolvió problemas utilizado la proporcionalidad.
Por otro lado, la regla de tres fue dada a conocer por los árabes en la edad media y en Occidente fue difundida en el siglo XII por Leonardo de Pisa o también llamado Fibonacci, descubridor de la famosa sucesión que lleva su nombre: 1,1,2,3,5,8,..., la regla de tres era llamada la Regla de los Mercaderes conocida así por su importancia en la resolución de problemas comerciales.

Leonardo de Pisa (1170-1250)

CONCEPTOS CLAVES

- **Proporcionalidad directa**
- **Proporcionalidad inversa**
- **Constante de proporcionalidad**
- **Gráficos de Proporcionalidad Directa e Inversa**

CONCEPTO DE RAZÓN

Una razón es una comparación por cuociente, una razón es de la forma: $\frac{a}{b}$

Por ejemplo utilizamos el concepto de razón en una receta de cocina: "mezclar tres tazas de harina por una de agua".

CONCEPTO DE PROPORCIÓN. REGLA DE TRES SIMPLE.

Una proporción es igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En una proporción se cumple que los productos cruzados son iguales: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$, esta propiedad se denomina Teorema fundamental de las Proporciones.

Una proporción, es por ejemplo la siguiente igualdad: $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, si multiplicamos cruzado, obtenemos la igualdad: $4 \cdot 15 = 12 \cdot 5$.

La proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, donde a, b y c son conocidos y "x" es la incógnita se conoce como regla de tres simple.

Aplicando el Teorema Fundamental de las Proporciones obtenemos $ax = bc$, por lo tanto $x = \frac{bc}{a}$.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Existen situaciones en la vida diaria, donde al aumentar (o disminuir) una variable, la otra aumenta (o disminuye) proporcionalmente, en este caso se dice que las variables están en proporcionalidad directa.

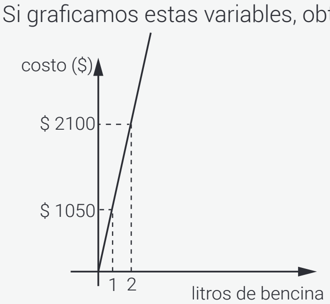
Por ejemplo, si al cargar un estanque de bencina en un servicentro, el litro vale \$1.050, los dos litros valdrían \$2.100, tres litros valdrían \$3.150, etc, si ordenamos los datos anteriores en una tabla, obtenemos:

x (litros de bencina)	1	2	3	4
y (costo)	1.050	2.100	3.150	4.200

Si dividimos "y" con "x" nos da siempre 1050 que es la constante de proporcionalidad y que en este caso corresponde al valor de un litro de bencina.

Tenemos entonces que si se tienen dos variables x e y están relacionadas según una proporcionalidad directa, la división entre ellas es una constante, es decir $\frac{y}{x} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Si graficamos estas variables, obtendremos lo siguiente:



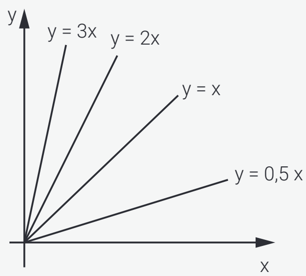
Tenemos entonces que las variables: número de litros de bencina (x) y su costo están en proporcionalidad directa (y), observa que si dividimos "y" con "x" obtenemos el valor del litro de bencina:

$$\boxed{\frac{y}{x} = \frac{1050}{1} = \frac{2100}{2} = \frac{3150}{3} ...= 1050}$$

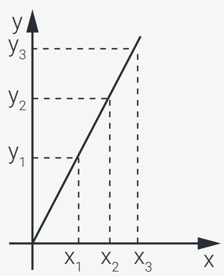
Entonces deducimos que: $\frac{y}{x} = 1050 \quad \leftrightarrow \quad y = 1050x$

esto corresponde a una función lineal que relaciona las variables x e y como veremos en el capítulo 9 y siempre el gráfico de una función lineal es una recta que pasa por el origen (o un conjunto de puntos que está sobre esta recta). La variable x se denomina variable independiente e y la variable dependiente, debido a que como en este caso el precio (variable dependiente) dependerá de los litros de bencina que compremos (variable independiente).

Observa que a medida que aumenta la constante de proporcionalidad, la semirecta tiene una mayor inclinación:



Resumiendo, tenemos que si dos variables x e y están relacionadas mediante un proporcionalidad directa, entonces se cumple que $\frac{y}{x} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad, además la relación entre ellas: y = kx corresponde a una función líneal, cuyo gráfico es una semirecta que pasa por el origen:



$$\boxed{\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k}$$

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos variables están en proporcionalidad directa cuando una de ellas aumenta la otra disminuye proporcionalmente.

Si tenemos que 4 llaves demoran 8 horas en llenar un estanque (teniendo ellas igual rendimiento), entonces el doble de llaves, es decir 8, demorarán la mitad del tiempo: 4 horas, etc.

Tendríamos entonces la siguiente situación:

x (n° de llaves)	4	8	2	1
y (horas)	8	4	16	32

Si multiplicamos "x" con "y" vemos que este producto permanece constante:

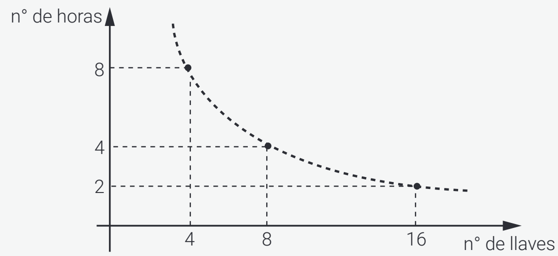
$4 \cdot 8 = 8 \cdot 4 = 2 \cdot 16 = 1 \cdot 32 = 32$

Este valor se denomina constante de proporcionalidad.

Tenemos entonces que si dos variables están en proporcionalidad inversa su producto permanece constante:

$x \cdot y = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

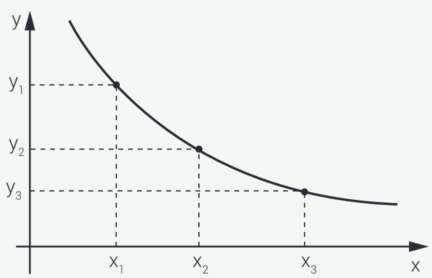
Si graficamos las variables del ejemplo, obtenemos:



Esta curva se conoce como hipérbola, y en este ejemplo se trata de una curva discontinua, ya que las variables solo toman valores discretos, es decir no toman todos los valores reales, debido a que el número de llaves solo toman números naturales.

Resumiendo, tenemos que si dos variables x e y están relacionadas mediante un proporcionalidad inversa, entonces se cumple que xy = k, donde k es la constante de proporcionalidad, además la gráfica corresponde a una curva que se denomina hipérbola, esta curva se acerca a los ejes coordenados, pero no los toca, lo cual se dice que los ejes son asíntotas de la curva.

Gráficamente:



$$\boxed{x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots = k}$$

5

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En una panadería, con 80 kilos de harina obtienen 120 kilos de pan corriente. ¿cuántos kilos de harina necesitarán para hacer 150 kilos de pan corriente?

A) $53,\overline{3}$
B) 100
C) 150
D) 225

Solución:

Acá las variables kilos de harina y kilos de pan están en proporcionalidad directa, ya que si se aumenta (o disminuye) una variable la otra aumenta (o disminuye) proporcionalmente.
Como el cuociente entre las variables permanece constante, tenemos la proporción:

$\frac{80}{120} = \frac{x}{150}$, ocupando el Teorema Fundamental de las Proporciones, tenemos que:

$80 \cdot 150 = 120 \cdot x \rightarrow x = \frac{80 \cdot 150}{120} = 100$

Por lo tanto se necesitan 100 kilos de harina, para fabricar 150 kilos de pan, luego la alternativa B es la correcta.

2. Un vehículo recorre un trayecto entre dos ciudades a una rapidez constante de 80 km/h demorando 30 minutos, ¿cuántos minutos menos habría demorado si el trayecto lo hubiese hecho a 100 km/h?

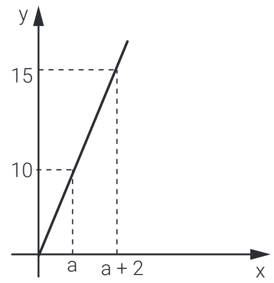
A) 6
B) 12
C) 18
D) 24

Solución:

Las variables rapidez y tiempo que demora en el trayecto están en proporcionalidad inversa, ya que si por ejemplo aumentamos la rapidez el tiempo que demoraría sería proporcionalmente menos.
Como las variables están en proporcionalidad inversa, tenemos que el producto de ellas permanece constante:

$80 \cdot 30 = 100 \cdot x \rightarrow x = 24'$, por lo tanto demoraría 6’ menos, respuesta A).

3. En el siguiente gráfico se ilustra la relación entre las variables x e y, donde k es la constante de proporcionalidad:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $a = 4$

B) $k = 2{,}5$

C) Si $x = 6$, entonces $y = 15$.

D) Si $y = 7{,}5$, entonces $x + y = 9{,}5$

Solución:

Debido a que la gráfica es una semirecta que pasa por el origen, las variables se relacionan mediante una proporcionalidad directa, entonces se cumple la proporción:

$\frac{15}{a+2} = \frac{10}{a}$, multiplicando cruzado, obtenemos: $15a = 10(a + 2)$, de esta ecuación se deduce que $a = 4$, luego A) es verdadera.

La constante de proporcionalidad la podemos obtener dividiendo un valor de "y" con su correspondiente valor

de "x": $k = \frac{10}{a} = \frac{10}{4} = 2{,}5$, luego B) también es verdadera.

Para la alternativa C) planteamos la proporción: $\frac{10}{a} = \frac{y}{6}$, reemplazando "a" por 4 y despejando "y" tenemos:

$\frac{10}{4} = \frac{y}{6} \rightarrow y = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15$, luego C) es verdadera.

Para la alternativa D) planteamos nuevamente una proporción: $\frac{10}{a} = \frac{7{,}5}{x}$, reemplazamos "a" por 4 y despejamos

"x": $\frac{10}{4} = \frac{7{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{7{,}5 \cdot 4}{10} = 3$, luego $x + y = 3 + 7{,}5 = 10{,}5$, luego D) es falsa.

5

4. ¿En cuál de las siguientes situaciones, las variables x e y están en proporcionalidad inversa?

A)

x	y
20	4
10	8
8	12

B)

x	y
10	50
20	40
30	30

C)

x	y
25	5
40	8
10	2

D)

x	y
12	6
24	3
4	18

Solución:
Como las variables están en proporcionalidad inversa, habría que ubicar la tabla en la cual el producto de las variables permanece constante:

A)

x	y	xy
20	4	80
10	8	80
8	12	96

El producto no es constante, luego no hay proporcionalidad inversa.

B)

x	y	xy
10	50	500
20	40	800
30	30	900

A pesar de que ha medida que aumenta “x”, “y” disminuye, el producto no es constante, por lo tanto no están en proporcionalidad inversa.

C)

x	y	xy
25	5	125
40	8	320
10	2	20

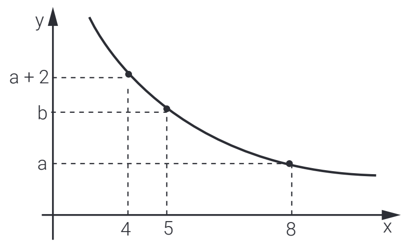
El producto no permanece constante, luego no están en proporcionalidad directa. Observa que están en proporcionalidad directa debido a que el cuociente permanece constante.

D)

x	y	xy
12	6	72
24	3	72
4	18	72

En este caso, si están en proporcionalidad inversa, ya que el producto entre las variables permanece constante, luego la alternativa es D).

5. En el gráfico de la figura se ilustra la relación entre dos variables x e y que están en proporcionalidad inversa:



Según los datos dados, el valor de b es

A) 2,8
B) 3,0
C) 3,2
D) 3,5

Solución:

Como las variables son inversamente proporcionales, el producto entre ellas permanece constante, entonces:

$4(a+2) = 8a \rightarrow 4a + 8 = 8a \rightarrow a = 2$, entonces tendríamos:

x	4	5	8
y	4	b	2

Como el producto permanece constante, tenemos que $4 \cdot 4 = 5 \cdot b \rightarrow b = 3{,}2$, luego la alternativa correcta es C).

6. A llaves pueden llenar una piscina llenan un estanque en B horas, ¿cuántos minutos menos demorarán (A+4) llaves?

A) $\dfrac{B}{A + B}$

B) $\dfrac{AB}{A + 4}$

C) $\dfrac{240B}{(A + 4)}$

D) $\dfrac{B}{15(A + 4)}$

Solución:

Las variables número de llaves y tiempo que demoran en llenar el estanque son inversamente proporcionales, luego se debe cumplir que: $AB = (A+4)x$, donde x es el tiempo en horas que demoran en llenar el estanque las (A+4) llaves, despejando, obtenemos: $\dfrac{AB}{A + 4}$

Entonces la cantidad de horas menos que se estarían demorando las (A+4) llaves sería:

$B - \dfrac{AB}{A + 4}$, lo cual nos da $\dfrac{4B}{A + 4}$, pero este tiempo está en horas y nos preguntan esta cantidad en minutos, luego multiplicamos esta expresión por 60, lo que nos da: $\dfrac{240B}{A + 4}$, luego la alternativa correcta es C).