Capítulo 7

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Bhaskara (1114-1185) también conocido como **Bhaskara II o Bhaskaracharya** ("Bhaskara el maestro") es quizás el matemático indio más conocido de la antigüedad.

Bhaskara representa la cima del desarrollo matemático del siglo XII, alcanza un gran conocimiento en los sistemas de numeración y resolución de ecuaciones entre ellas la famosa resolvente de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0 \rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, tema que veremos en el presente capítulo.

CONCEPTOS CLAVES

- **Ecuación cuadrática**
- **Resolución mediante factorización y fórmula**
- **Naturaleza de las soluciones**
- **Aplicaciones a la resolución de problemas**

RESOLUCIÓN DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.
Para resolver una ecuación de este tipo, existen diversos métodos, entre los más importantes, tenemos:

- Factorización
- Completación de cuadrados
- Uso de fórmula general

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$
Esta ecuación se puede resolver fácilmente, si factorizamos el trinomio $x^2 - 10x + 24$, para ello determinamos dos números que sumen −10 y multipliquen 24, estos son − 4 y −6, luego la factorización del trinomio es $(x - 4)(x - 6)$, entonces la ecuación queda $(x - 4)(x - 6) = 0$.
Como el producto es cero uno de los factores debe ser cero, por lo tanto $x - 4 = 0$ o $x - 6 = 0$, de donde se concluye que las soluciones son 4 o 6.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x^2 - 8x - 20 = 0$
Esta ecuación la resolveremos mediante una completación de cuadrados.
Esta técnica consiste en formar un cuadrado de binomio, para ello procederemos de la siguiente forma:

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

Tomamos la mitad del coef. de x, y lo elevamos al cuadrado, en este caso $-8 : 2 = -4$, $(-4)^2 = 16$ por lo tanto formamos un 16 al lado izquierdo, para ello debemos sumar 36 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \qquad /+36$$

$$x^2 - 8x + 16 = 36$$

El lado izquierdo corresponde al desarrollo del cuadrado de binomio $(x - 4)^2$, por lo que la ecuación queda:

$$(x - 4)^2 = 36$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados:

$$x - 4 = \pm\sqrt{36}$$

Por lo tanto, $x - 4 = 6$ o $x - 4 = -6$, luego las soluciones son $x = 10$ o $x = -2$.

(*) La formación del cuadrado de binomio explicado de esta forma resulta cuando el coeficiente de x^2 es uno, de no ser así debes dividir previamente la ecuación por este coeficiente.

8

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 12 = 0$
Esta ecuación la resolveremos utilizando la fórmula general.
Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, podemos hallar sus soluciones, utilizando la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

En este ejemplo, $a = 2$, $b = 5$ y $c = -12$, entonces las soluciones son:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}, \text{ es decir } x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{3}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = -4$$

DETERMINACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA DADAS SUS SOLUCIONES

8

Supongamos que las soluciones de una ecuación cuadrática son x1 y x2, por lo visto en la técnica de factorización, la ecuación debe ser de la forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, desarrollando, obtenemos la ecuación:

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0}$$

Esta corresponde entonces a la ecuación cuadrática cuyas soluciones son x_1 y x_2.

NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES

Sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$,

las podemos hallar con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la cantidad subradical se denomina **discriminante** y se designa con la letra Δ.

Dependiendo del signo del discriminante, tenemos los siguientes casos:

Signo de Δ	Tipo de soluciones
Positivo	Reales y distintas
Cero	Reales e iguales
Negativo	No reales

(*) En el caso en que las soluciones no son reales, estas serán de la forma p + qi y p − qi con p y q numeros reales y $q \neq 0$, es decir serán complejas conjugadas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuál es la ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son los números reales $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$?

Solución:

Habíamos visto que si x_1 y x_2 son las soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación es: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, o bien $x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

En este caso, $x_1 + x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{(-1)^2 - (\sqrt{5}\,)^2}{4} = -1$, luego la ecuación es

$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0 \leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

2. Se sabe que una de las soluciones de la ecuación $6x^2 + kx - (k - 4) = 0$ es $x = \frac{1}{3}$, ¿cuál es la otra solución?

A) $-\frac{1}{2}$

B) $-\frac{3}{2}$

C) 7

D) -7

Solución:

Como $x = \frac{1}{3}$, reemplazamos este valor en la ecuación: $6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + k \cdot \frac{1}{3} - (k - 4) = 0 \leftrightarrow \frac{6}{9} + \frac{k}{3} - (k - 4) = 0 \leftrightarrow k = 7$, reemplazando en la ecuación dada se obtiene: $6x^2 + 7x - 3 = 0$, resolviendo esta ecuación con la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se obtiene $x = \frac{-7 \pm 11}{12}$, es decir $x = \frac{1}{3}$ o $x = -\frac{3}{2}$, luego la otra solución es $x = -\frac{3}{2}$, alternativa B).

3. En un rectángulo el largo mide 5 cm menos que el triple del ancho. Si el ancho aumenta en 2 cm y el largo disminuye en 1 cm, la suma de las áreas de ambas figuras es 27 cm^2, ¿cuánto mide el ancho del primer rectángulo?

A) 3 cm

B) 4 cm

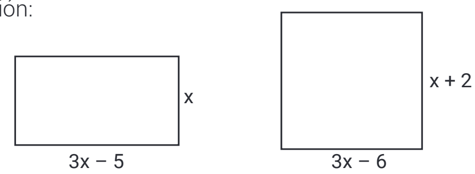
C) 5 cm

D) 12 cm

8

Solución:

Tenemos la siguiente situación:



Como la suma de las áreas es 27 cm^2, planteamos la ecuación:

$x(3x - 5) + (3x - 6)(x + 2) = 27$

$3x^2 - 5x + 3x^2 + 6x - 6x - 12 = 27$

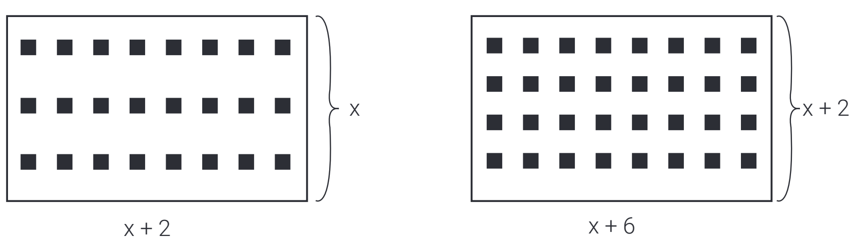
$6x^2 - 5x - 39 = 0$, resolviendo esta ecuación obtenemos $x = -\dfrac{13}{6}$ o $x = 3$, descartando el valor de x negativo, ya que es una distancia, obtenemos que el ancho del rectángulo original mide 3 cm, respuesta A).

4. En una sala de conferencias de una universidad, las butacas están ordenadas en filas, teniendo todas las filas igual cantidad de butacas, de modo que la cantidad de butacas por fila excede en 2 a la cantidad de filas. Debido a lo estrecho del recinto se construirá otra sala de conferencias la que tendrá 2 filas más y la cantidad de butacas por fila aumentarán en 4. Si la suma de las capacidades de ambas salas será de 312 personas, ¿cuántas butacas tenía por fila la primera sala de conferencias?

Solución:

Supongamos que en la primera sala de conferencias hay x filas , por lo que habrá $(x + 2)$ butacas por fila, luego su capacidad es $x(x + 2)$.

En la segunda sala, habrá $(x + 2)$ filas y $(x + 6)$ butacas por fila, luego su capacidad es $(x + 2)(x + 6)$:



1ª Sala 2ª Sala

Por el enunciado, la suma de las capacidades de ambas salas es 312, luego $x(x + 2) + (x + 2)(x + 6) = 312$
$x^2 + 5x - 150 = 0$, las soluciones de esta ecuación son -15 y 10, descartamos la solución negativa, luego $x = 10$.
Entonces el número de butacas por fila en la primera sala es 12.