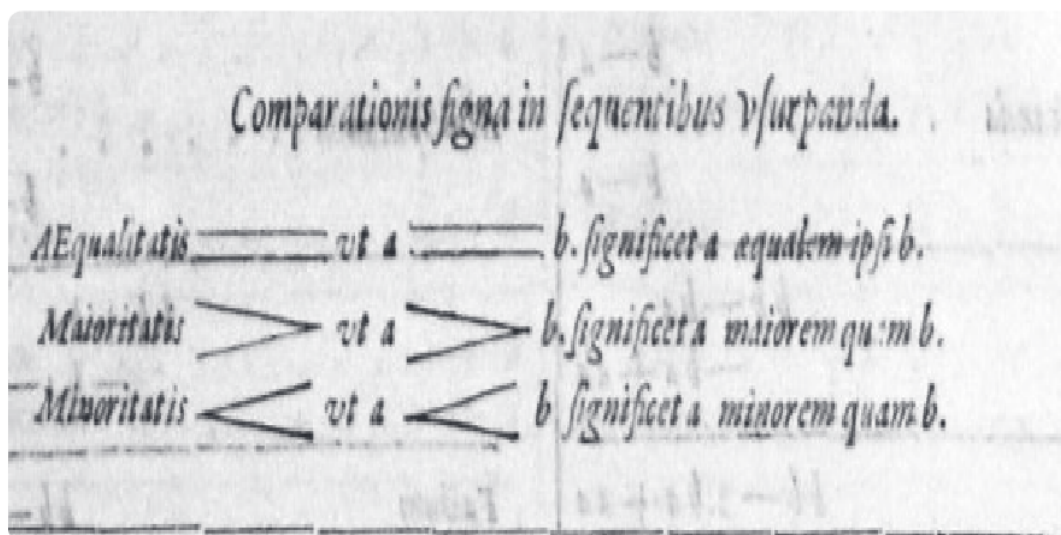


Capítulo 6

DESIGUALDADES E INECUACIONES



El primer matemático que introdujo los símbolos de desigualdad ">" (mayor que) y "<" (menor que) fue **Thomas Harriot** (1520-1621) en su manuscrito "Artis analyticae praxis", el cual fue publicado después de su muerte. Los símbolos que aparecieron en la publicación se muestran en la figura, pero se cree que los editores modernizaron los símbolos originales ya que estos eran curvos parecidos a cuernos.

CONCEPTOS CLAVES

- **Desigualdades**
- **Gráfico**
- **Intervalos**
- **Inecuaciones de primer grado**

✓ DESIGUALDADES

Una desigualdad es una expresión que utiliza los símbolos ">" (mayor), "<" (menor), "≥" mayor o igual o "≤" menor o igual.

Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

1. Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

$$\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array} \rightarrow a + c < b + d$$

$$\begin{array}{l} a \leq b \\ c < d \end{array} \rightarrow a + c < b + d$$

2. Si se suma o resta un número a ambos lados de una desigualdad, esta se conserva.

$$a < b \rightarrow a + c < b + c \quad ; \quad a \leq b \rightarrow a - c \leq b - c$$

3. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número positivo, esta se conserva.

$$a < b \text{ y } c > 0 \rightarrow ac < bc \quad ; \quad a \leq b \text{ y } c > 0 \rightarrow ac \leq bc$$

4. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número negativo, esta se invierte.

$$a < b \text{ y } c < 0 \rightarrow ac > bc \quad ; \quad a \leq b \text{ y } c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

7

✓ PROPIEDADES CON DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES

En los números reales se cumplen las siguientes propiedades relativas a desigualdades:

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos, entonces sus cuadrados mantienen la desigualdad:

$$0 < a < b \rightarrow a^2 < b^2$$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos negativos, entonces sus cuadrados invierten la desigualdad:

$$a < b < 0 \rightarrow a^2 > b^2$$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos o ambos negativos, entonces sus recíprocos invierten la desigualdad:

$$0 < a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad ; \quad a < b < 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

- Si se tiene un número entre cero y uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez menor:

$$0 < a < 1 \rightarrow \dots a^4 < a^3 < a^2 < a$$

- Si se tiene un número mayor uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez mayor:

$$a > 1 \rightarrow \dots a^4 > a^3 > a^2 > a$$

- La suma de los cuadrados de dos números es mayor o igual que el doble del producto de los números:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

✓ INTERVALOS DE NÚMEROS REALES

Un intervalo es un subconjunto de números reales, existen diversos tipos de intervalos, los cuales pasamos a detallar a continuación:

Tipo de Intervalo	Descripción	Notación Conjuntista	Notación de Intervalo	Gráfico
Cerrado	Considera todos los números reales que están entre dos números, considerando los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
Abierto	Considera todos los números reales que están entre dos números, sin considerar los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	$]a, b[$	
Intervalo semi abierto por la izquierda (o semi cerrado por la derecha)	Considera todos los números reales que están entre dos números, sin considerar el extremo izquierdo.	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$]a, b]$	
Intervalo semi abierto por la derecha (o semi cerrado por la izquierda)	Considera todos los números reales que están entre dos números, sin considerar el extremo derecho.	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$[a, b[$	
Intervalo no acotado por la izquierda	Considera todos los números reales que son menores (o menores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ $\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	$] - \infty, a[$ $] - \infty, a]$	
Intervalo no acotado por la derecha	Considera todos los números reales que son mayores (o mayores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ $\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$]a, \infty[$ $]a, \infty]$	

✓ TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO CON DESIGUALDADES A EXPRESIÓN ALGEBRAICA

A continuación veremos cómo plantear algunos enunciados relacionados con desigualdades:

Enunciado	Expresión algebraica
A mayor que B	$A > B$
A menor que B	$A < B$
A mayor o igual que B	$A \geq B$
A menor o igual que B	$A \leq B$
A es a lo sumo igual a B	$A \leq B$
A es a lo menos B	$A \geq B$
A es a lo más B	$A \leq B$

✓ INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación lineal con una incógnita es una desigualdad donde el mayor exponente de la incógnita es uno. Ejemplos de inecuaciones lineales: $ax + b < c$; $ax + b \geq c$, donde x es la incógnita y a , b y c son números reales. Para resolver las inecuaciones lineales debemos ocupar las propiedades de las desigualdades.

Ejemplo:

Resolver la inecuación $12x + 8 < 32$

- (1) Restamos 8 ambos lados de la inecuación (por prop. 2 la desigualdad no cambia)
 $12x < 24$
- (2) Dividimos por 12 a ambos lados de la inecuación (por prop. 3 la desigualdad no cambia)
 $x < 2$

Este resultado lo podemos anotar mediante un conjunto un intervalo o forma gráfica.

Conjunto	Intervalo	Gráfico
$\{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$	$] - \infty, 2[$	

Observación: en el caso en el que en la inecuación se elimine la incógnita, tenemos dos posibilidades:

- (1) Si la inecuación conduce a una contradicción, entonces no tiene soluciones.

Ejemplo: $2x - 3 < 2x - 5 \Leftrightarrow -3 < -5 \Leftrightarrow S = \emptyset$

- (2) Si la inecuación conduce a una afirmación que es siempre verdadera, entonces tiene infinitas soluciones.

Ejemplo: $4 - (x+1) > 2 - x \Leftrightarrow 3 - x > 2 - x \Leftrightarrow 3 > 2 \Leftrightarrow S = \mathbb{R}$



PORTAL EDUCATIVO

www.21temas.cl



Ingresa con este código QR. Te dirigirá al portal educativo www.21temas.cl en donde debes registrarte y poderás acceder a:

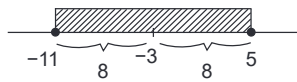
- clases con contenidos
- clases con ejercicios
- videos de resolución de ejercicios propuestos
- y ¡mucho más!

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Los números que están a una distancia a los sumo igual a 8 del -3 y no son mayores que 2, corresponde al intervalo

Solución

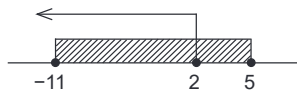
Los números que "están a una distancia a los sumo igual a 8 del -3 " corresponde al intervalo:



Por otro lado los que "no son mayores que 2" corresponde al intervalo:



Intersectando los dos intervalos obtenidos:



Se obtiene el intervalo $[-11, 2]$.

2. Un servicio de taxis cobra una tarifa inicial de \$1500 (llamada "bajada de bandera") más \$130 por cada 200 metros de recorrido (lo que se va cobrando cuando finaliza los 200 m).
Si un cliente tiene \$3.000, ¿para cuántos km de recorrido le alcanza?

Solución:

Tenemos que la tarifa es $1500 + 130x$ donde x es la cantidad de tramos de 200 metros que haya recorrido, entonces planteamos la inecuación $1500 + 130x \leq 3000$, cuya solución es $x \leq 11,53\dots$, es decir los \$3.000

le alcanzará para un recorrido a lo sumo igual a 11 tramos de 200 metros, si transformamos esto a

kilómetros, calculamos $\frac{11 \cdot 200}{1000}$ lo que nos arroja 2,2 km.

Por lo tanto, con \$3.000 le alcanza para un recorrido a lo sumo igual a 2,2 km.

3. Una mamá debe comprar cuadernos universitarios, estos pueden ser tapa blanda o tapa dura cuyos valores respectivos son \$800 y \$1200.
Si la cantidad de cuadernos de tapa dura deben ser 5 más que los de tapa blanda y su gasto no debe exceder los \$35.000, ¿cuál es la mayor cantidad posible de cuadernos de tapa dura que puede comprar?

Solución:

Supongamos que compra "x" cuadernos de tapa blanda, por lo tanto debe comprar "x + 5" de tapa dura. El gasto es entonces $1200(x + 5) + 800x$, el cual no debe exceder los \$35.000, por lo que el enunciado del problema nos conduce a la inecuación $1200(x + 5) + 800x \leq 35000$, dividiendo por 100, obtenemos la inecuación equivalente $12(x + 5) + 8x \leq 350$, resolviendo obtenemos que $x \leq 14,5$, por lo que el mayor valor posible para los cuadernos de tapa blanda es 14 y por ende el mayor valor posible para los de tapa dura es 19.

4. Si a y b son números reales negativos tal que $a > b$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) $a^2 > ab$
 B) $\frac{a}{b} > 1$
 C) $\frac{a+b}{b} > 1$
 D) $\frac{b-a}{a+b} > 1$

Solución:

En A) si dividimos por "a" a ambos lados de la desigualdad $a^2 > ab$, la desigualdad se invierte ya que $a < 0$, entonces nos queda $a < b$, lo que contradice la hipótesis, luego es falsa.

En B) si multiplicamos por b la desigualdad $\frac{a}{b} > 1$, se invierte la desigualdad debido a que $b < 0$, entonces queda $a < b$, lo cual contradice la hipótesis, luego la afirmación de esta alternativa es falsa.

En C) si multiplicamos la desigualdad $\frac{a+b}{b} > 1$ por b, obtenemos $a + b < b$ (se invierte la desigualdad debido a que $b < 0$), de $a + b < b$, obtenemos que $a < 0$, lo cual es correcto, luego lo que se afirma en esta alternativa es verdadero.

En D) si multiplicamos la desigualdad $\frac{b-a}{a+b} > 1$ por $a + b$, la desigualdad se invierte debido a que $a + b < 0$, luego se obtiene que $b - a < a + b$, o equivalentemente $-a < a$, esto no se cumple debido a que $a < 0$, luego es falsa.

Nota: el método utilizado en este ejercicio consiste en desarrollar la afirmación dada, convirtiéndola a otra expresión equivalente, si concluimos que esta es verdadera (o falsa) la original también será verdadera (o falsa).