Capítulo 5

PLANTEO DE PROBLEMAS

George Pólya (1887-1985) matemático húngaro, es uno de los nombres míticos en la historia moderna de las matemáticas y sus estudios y publicaciones estuvieron referidas a la resolución de problemas.

CONCEPTOS CLAVES

- **Traducción a lenguaje algebraico**
- **Ecuación de primer grado**
- **Sistemas de ecuaciones**

TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO A LENGUAJE ALGEBRAICO

Si queremos resolver un problema, a través del planteo de una ecuación, debemos traducir lo expresado en el enunciado a lenguaje algebraico, para ello es conveniente considerar las siguientes conversiones.

El doble de x..	$2x$
El triple de x..	$3x$
El sucesor de n..	$n + 1$ (si $n \in$ □)
El antecesor de n	$n - 1$ (si $n \in$ □)
El cuadrado de x..	x^2
El cubo de x..	x^3
El inverso aditivo u opuesto de x..............................	$-x$
A sumado con B..	$A + B$
A restado con B..	$A - B$
B disminuido en A...	$B - A$
A sustraído de B..	$B - A$
El producto entre A y B..	$A \cdot B$
El cuociente entre A y B..	$\frac{A}{B}$ (con $B \neq 0$)
El inverso multiplicativo o recíproco de x.............	x^{-1} o $\frac{1}{x}$ (si $x \neq 0$)
Suma de los cuadrados entre A y B........................	$A^2 + B^2$
Cuadrado de la suma entre A y B.............................	$(A + B)^2$

Número de dos cifras con el digito de las decenas es d y el de las unidades es u.....$10d + u$

5

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema lineal de ecuaciones, con dos variables y dos incógnitas, es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right|$$

, donde las incógnitas son "x" e "y" y los coeficientes son números reales.

Existen diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones, los más importantes son:

- Igualación
- Sustitución
- Reducción

Veamos algunos ejemplos, para distinguir cada uno de estos métodos.

Igualación

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 13 \\ 6x + y = 19 \end{array}\right|$

Tanto en la primera como en la segunda ecuación despejamos "y" (o bien la otra incógnita):

Ecuación (1): $2x - y = 13 \rightarrow y = 2x - 13$

Ecuación (2): $6x + y = 19 \rightarrow y = 19 - 6x$, igualando ambas expresiones para "y", tenemos:

$2x - 13 = 19 - 6x \rightarrow 8x = 32 \rightarrow x = 4$

Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos el valor de "y".

Por ejemplo si se reemplaza $x = 4$ en la primera ecuación, obtenemos $8 - y = 13 \rightarrow y = -5$.

5

Sustitución

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 28 \\ 3x + 2y = 9 \end{array}\right|$

Este método consiste en que en una de las dos ecuaciones despejamos una de las incógnitas, posteriormente, este valor obtenido se reemplaza en la otra ecuación.

Por ejemplo, si en la primera ecuación despejamos "y", tenemos que $y = 5x - 28$, ahora esta expresión la reemplazamos en la otra ecuación:

$3x + 2(5x - 28) = 9 \rightarrow 13x = 65 \rightarrow x = 5$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de "y".

Si en la primera ecuación, reemplazamos x por 5, se obtiene: $25 - y = 28 \rightarrow y = -3$.

Reducción

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 49 \\ 5x + 3y = 15 \end{array}\right|$

Este método consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por ciertos factores, de modo que al sumar o restar ambas ecuaciones se elimine una de las incógnitas.

En este sistema, por ejemplo eliminaremos la incógnita "y" para ello multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 5, de modo que los coeficientes de "y" queden cambiados de signo:

$\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 49 \\ 5x + 3y = 15 \end{array}\right| \begin{array}{l} /\cdot 3 \\ /\cdot 5 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x - 15y = 147 \\ 25x + 15y = 75 \end{array}\right|$, sumando ambas ecuaciones, se obtiene $37x = 222 \rightarrow x = 6$,

reemplazando este valor en cualesquiera de las ecuaciones, se obtiene $y = -5$.

En los ejercicios resueltos, veremos cómo los sistemas de ecuaciones nos permitirán resolver problemas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Felipe tiene dos cuentas corrientes y en una de las cuentas tiene los $\frac{2}{3}$ de lo que tiene en la otra.

Si saca \$500.000 de una de ellas y la deposita en la otra, quedan iguales.

¿Cuánto dinero tenía inicialmente en cada una de ellas?

Solución:

Supongamos que los montos que tiene en las cuentas corrientes son x y $\frac{2}{3}x$.

Si saca \$500.000 y lo deposita en la otra, entonces en cada una de ellas tendrá:

$x - 500000$ y $\frac{2}{3}x + 500000$, asumimos que debe sacar de la que tiene más dinero ya que posteriormente se afirma que quedan iguales:

$x - 500000 = \frac{2}{3}x + 500000 \rightarrow x - \frac{2}{3}x = 1000000 \rightarrow \frac{1}{3}x = 1000000 \rightarrow x = 3000000$,

Por lo tanto, lo que tenía inicialmente en las cuentas era: x = \$3.000.000 y $\frac{2}{3}x$ = \$2.000.000

2. Un número tiene dos cifras de modo que la cifra de las decenas tiene una unidad más que el triple de la cifra de las unidades. Si se suma el número con el número que resulta de invertir sus cifras, resulta 99, ¿cuál es el número?

Solución:

Supongamos que la cifra de las unidades es x, entonces según la información dada, la cifra de las decenas es $3x + 1$.

Sabemos que si un número tiene dos cifras, donde las unidades es "u" y las decenas es "d", entonces el número es u+10d, y en este caso el número es $x + 10 \cdot (3x + 1)$, entonces el número con las cifras invertidas sería $10x + (3x + 1)$.

El enunciado afirma que si se suman estos dos números el resultado es 99, entonces

$x + 10 \cdot (3x + 1) + 10x + (3x + 1) = 99$, resolviendo esta ecuación se obtiene x = 2, por lo tanto el número es 72.

5

3. La suma de las edades de dos hermanos es 25 años y en 5 años más uno va a tener los $\frac{3}{4}$ de lo que tendrá el otro. ¿Qué edades tienen actualmente?

Solución:

Supongamos que las edades son x e y, entonces $x + y = 25$, en cinco años más las edades serán $x + 5$; $y + 5$, entonces $x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5)$.

Entonces el enunciado nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5) \end{array}\right|$$
, multiplicando la segunda ecuación por 4, para eliminar las fracciones, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x + 20 = 3(y + 5) \end{array}\right|$$
, ordenando, se llega al sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x - 3y = -5 \end{array}\right|$.

Podemos resolver este sistema con cualquiera de los métodos vistos anteriormente, acá lo resolveremos por sustitución.

Despejamos una incógnita de la primera ecuación, por ejemplo si despejamos"x", tenemos $x = 25 - y$, y esto lo reemplazamos en la segunda ecuación: $4(25 - y) - 3y = -5$, resolviendo esta ecuación obtenemos $y = 15$, sustituyendo en cualesquiera de las ecuaciones obtenemos $x = 10$, luego las edades son 10 y 15 años.

4. Francisco lleva ahorrado $5.200 en monedas de $100 y $500.
Si el total de monedas son 20, ¿cuántas tiene de cada denominación?

Solución:

Supongamos que tiene x monedas de $100 e y monedas de $500, entonces podemos plantear el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ 100x + 500y = 5200 \end{array}\right|$$
, en este sistema se puede reducir la segunda ecuación si dividimos por 100:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x + 5y = 52 \end{array}\right|$$
, si restamos la segunda ecuación con la primera (o usando cualquier otro método), se obtiene: $5y - y = 32 \rightarrow y = 8$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se concluye que $x = 12$, luego tiene 12 monedas de $100 y 8 monedas de $500.