Capítulo 4

OPERATORIA ALGEBRAICA

Al-Juarismi, matemático de origen persa que vivió en el siglo IX, desarrolló el Álgebra, rama de la Matemática que generaliza la Aritmética, cuyo estudio son los números y sus operaciones

CONCEPTOS CLAVES

- Factor o divisor
- Productos notables
- Factorización
- Ecuación de primer grado
- Sistemas de ecuaciones

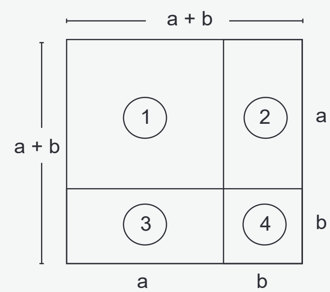
PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables más importantes son los siguientes:

Suma por su diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Cuadrado de binomio	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Producto de binomios con término común	$(ax + b)(ax + c) = (ax)^2 + (b + c)ax + bc$
Cuadrado de trinomio	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
Cubo de binomio	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Visualización geométrica de algunos productos notables:

- **Cuadrado de binomio:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



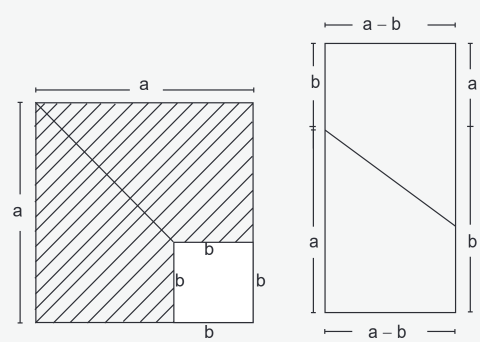
El cuadrado de lado a + b se ha dividido en cuatro sectores cuyas áreas son las siguientes:
Área 1: a^2, Área 2: ab , Área 3: ab, Área 4: b^2.
Por lo tanto: $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$, de donde se concluye que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- **Suma por su diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

En la figura de la izquierda se tienen dos cuadrados de lados a y b respectivamente.

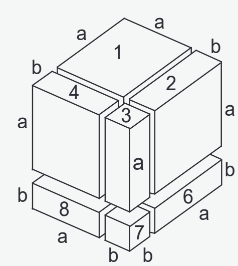
Si esta figura se recorta, se puede formar el rectángulo de la derecha, cuyos lados son $(a + b)$ y $(a - b)$.

Por lo tanto el área sombreada de la izquierda: $a^2 - b^2$ es igual al área del rectángulo de la derecha $(a + b)(a - b)$, por lo tanto $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.



- **Cubo de binomio:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

El cubo de arista (a + b) de la figura, se ha dividido en 8 cuerpos, los volúmenes de cada uno de ellos son los siguientes:
$V1 = a^3$, $V2 = a^2b$, $V3 = ab^2$, $V4 = a^2b$, $V5 = a^2b$, $V6 = ab^2$, $V7 = b^3$ y $V8 = ab^2$.
La suma de los 8 volúmenes sería igual al volumen del cubo inicial que es $(a + b)^3$, con lo que se concluye que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



4

FACTORIZACIÓN

La factorización consiste en expresar sumas y restas en productos.

Las factorizaciones que más se utilizan son las siguientes:

Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Factorización de trinomio cuadrático	$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$, con $p + q = b$ y $pq = c$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Supongamos que tenemos la ecuación de primer grado $ax - b = 0$, al despejar x, obtenemos que $x = \frac{b}{a}$, entonces tenemos tres casos:

- Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $x = 0$.
- Si $a \neq 0$, entonces x tiene una única solución.
- Si $a = b = 0$, entonces x tiene infinitas soluciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es de la forma:

$$\begin{array}{l|} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ \hline \end{array}$$ donde a, b, c, a', b' y c' son números reales y x e y son las soluciones.

Al encontrar las soluciones para "x" y para "y" lo que estamos encontrando es el punto donde se intersectan las rectas cuyas ecuaciones son las que aparecen en el sistema.

En el siguiente capítulo veremos los métodos de reducción, igualación y sustitución que permiten resolver este tipo de sistemas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $a - 2b + 3 = 0$, entonces $a^2 + 4b^2 - 3a + 6b - 4ab =$

A) -18
B) 0
C) 15
D) 18

Solución:

La expresión dada, la podemos factorizar por agrupación, para ello la ordenamos conveniente:

$a^2 - 4ab + 4b^2 - 3a + 6b$, los tres primeros términos corresponden al desarrollo de un cuadrado de binomio:

$a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2$, mientras que la expresión restante: $-3a + 6b$, la podemos factorizar por -3, lo que nos queda $-3(a - 2b)$.

Entonces, $a^2 - 4ab + 4b^2 - 3a + 6b = (a - 2b)^2 - 3(a - 2b)$, pero $a - 2b + 3 = 0$, o equivalentemente $a - 2b = -3$, reemplazando este valor en $(a - 2b)^2 - 3(a - 2b)$, se obtiene $(-3)^2 - 3 \cdot -3 = 18$

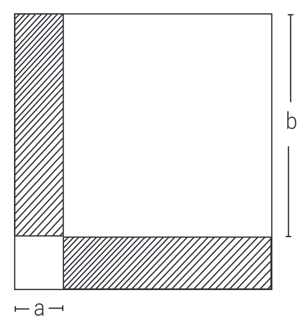
2. La figura está formada por dos cuadrados de lados a y b y dos rectángulos sombreados.
¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** corresponde al área sombreada?

A) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$

B) $2(a + b)b - 2b^2$

C) $2a(a + b) - a^2$

D) $\dfrac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{2}$



Solución:

Observa que los lados del cuadrado grande miden a+b, por lo que su área es $(a+b)^2$ y si a esta área le restamos las áreas de los cuadrados blancos obtenemos el área sombreada, entonces

área sombreada = $(a + b)^2 - a^2 - b^2 = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ luego A) es verdadera.

Observa que el área de la figura sombreada corresponde al área de dos rectángulos de lados a y b, luego su área es 2ab, esto lo ocuparemos para analizar cuál de las alternativas nos conducen a este valor.

En B) si desarrollamos la expresión $2(a + b)b - 2b^2 = 2ab + 2b^2 - 2b^2 = 2ab$, luego es correcta.

En C) si desarrollamos $2a(a + b) - a^2 = 2a^2 + 2ab - a^2 = a^2 + 2ab$, como esto no es equivalente a 2ab, esta alternativa no corresponde al área sombreada.

Ahora desarrollaremos la expresión de la alternativa D)

$\dfrac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{2} = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2} = 2ab$ lo que corresponde al área sombreada.

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es un factor de $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$?

A) ab
B) a + b
C) a – b
D) $a^2 - b^2$

Solución:

La expresión $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$, se puede factorizar por el factor común $(a - b)^2$, entonces nos queda: $(a - b)^2 (a - b + 2b) = (a - b)^2 (a + b)$, observa que esta última expresión tiene como factores o divisores a las siguientes expresiones: $(a - b)$, $(a + b)$ o $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, sin embargo ab no es uno de los factores, luego la alternativa A) no es un factor de la expresión dada.

4. Las aristas de dos cubos miden respectivamente (a+b) y (a-b) unidades.
¿Cuál es la diferencia, en ese orden, en unidades cúbicas, entre sus volúmenes?

Solución:

El volumen de cubo de arista a es a^3, por lo tanto el volumen del primer cubo es $(a + b)^3$,

según el producto notable de un cubo de binomio, tenemos que

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, mientras que el volumen del segundo cubo es

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, restando ambos volúmenes, tenemos:

$(a + b)^3 - (a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = 6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2)$.

5. Si (1, -2) es solución del sistema de ecuaciones $\begin{array}{|l} p(x + 1) - 2q(y + 3) = 14 \\ p(x + 2) + q(y - 2) = 26 \end{array}$, entonces p + q =

A) -7
B) -3
C) 5
D) 7

Solución:

Si reemplazamos x por 1 e y por -2 en el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$\begin{array}{l|} 2p - 2q = 14 \\ 3p - 4q = 26 \end{array}$, multiplicamos la primera ecuación por -2 (para que los coeficientes de q queden opuestos):

$\begin{array}{l|} -4p + 4q = -28 \\ 3p - 4q = 26 \end{array}$, sumando ambas ecuaciones, obtenemos p = 2, reemplazando en la segunda ecuación se

tiene que $6 - 4q = 26 \rightarrow q = -5$, entonces p + q = -3, respuesta B).