

Capítulo 3

POTENCIAS Y RAÍCES

r_5
 $\sqrt{5}$
 $\sqrt{5}$



El símbolo de raíz cuadrada lo utilizó por primera vez en 1525 el matemático polaco **Cristoph Rudolff**. En un principio era una "r" de "root" (raíz en inglés) que con el transcurso de los años se fue transformando.

CONCEPTOS CLAVES

- Base y exponente
- Conversión entre potencia y raíz
- Ecuaciones exponenciales
- Racionalización



DEFINICIONES

Definición de potencia

Si a es un número real y n es un número entero positivo, entonces la potencia a^n se define como el producto $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n - veces).

También se define $a^0 = 1$ y $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$).

Definición de potencia de exponente fraccionario

Una potencia de exponente fraccionario es equivalente a una raíz:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

3



PROPIEDADES

1. Producto de potencias de igual base

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

2. División de potencias de igual base

$$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$$

3. Potencia de potencia

$$(A^n)^m = A^{nm}$$

4. Producto de potencias de igual exponente

$$A^n \cdot B^n = (AB)^n$$

5. División de potencias de igual exponente

$$\frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n$$

6. Igualdad de potencias

$$A^n = B^n \rightarrow A = B \text{ (con } A \neq 0, A \neq 1, B \neq 0, B \neq 1)$$

7. Eliminación de raíz

$$\sqrt[n]{A^n} = |A|. \text{ Si } A > 0, \text{ se tiene que } \sqrt[n]{A^n} = A$$

8. Producto de raíces de igual índice

$$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB}$$

9. División de raíces de igual índice

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

10. Amplificación y simplificación de índice con exponente

$$\sqrt[nm]{A^{mp}} = \sqrt[n]{A^p}; \sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nm]{A^{mp}}$$

11. Raíz de raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[nm]{A}$$

12. Ingreso de factor dentro de una raíz

$$A \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n \cdot B} \quad (A > 0 \text{ si } n \text{ es par})$$

(*) Se entenderá la validez de las propiedades siempre que las raíces existan, es decir si están definidas en los reales.



RACIONALIZACIÓN

La racionalización consiste en eliminar las raíces que están en el denominador de una expresión fraccionaria. Veremos acá solo los casos más utilizados.

- A)** En el denominador aparece solo una raíz cuadrada y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por la misma raíz que aparece.

Ejemplo:

Racionalizar $\frac{4}{\sqrt{8}}$

$$\text{Amplificamos la fracción por } \sqrt{8} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

- B)** En el denominador aparecen adiciones y sustracciones donde uno o ambos términos son raíces cuadradas.

En este caso, se amplifica la fracción de modo de formar una suma por su diferencia.

Ejemplo:

Racionalizar $\frac{9}{3 - \sqrt{3}}$

Amplificamos la fracción por $3 + \sqrt{3}$ para formar una suma por su diferencia.

$$\frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{6} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{3})}{2}$$

- C)** En el denominador aparece solo una raíz de índice superior a dos y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por una raíz del mismo índice de la que aparece, con un exponente tal que al sumar con el exponente de la raíz que aparece resulte un múltiplo del índice.

Ejemplo:

Racionalizar $\frac{10}{\sqrt[3]{2^4}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt[3]{2^2}$, así al multiplicar ambas raíces se eliminará la raíz que aparece.

$$\frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2^2} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $\frac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} =$

Solución:

Cuando se tiene una suma o una resta de potencias de igual base, se debe factorizar por la menor potencia.

En la diferencia $3^{27} - 3^{25}$, se factoriza por el factor 3^{25} , entonces nos queda, $3^{25} \cdot (3^2 - 1)$.

En la diferencia que se ubica en el denominador, factorizamos por 2^{27} , entonces resulta $2^{27} \cdot (2^2 - 1)$, por lo que la fracción dada queda de la forma:

$$\frac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} = \frac{3^{25}(3^2 - 1)}{2^{27}(2^2 - 1)} = \frac{3^{25} \cdot 8}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{3 \cdot 2^{27}} = \frac{3^{24}}{2^{24}}, \text{ o bien } \left(\frac{3}{2}\right)^{24} \text{ (prop. 5)}$$

2. Si $3^{x+5} - 3^{x+3} = 72$, determina el valor de x .

Solución:

Al igual que en el ejemplo 1, la diferencia de potencias $3^{x+5} - 3^{x+3}$ se puede calcular factorizando por 3^{x+3} :

$$3^{x+3}(3^2 - 1) = 72$$

$$3^{x+3} \cdot 8 = 72 \quad / : 8$$

$$3^{x+3} = 9$$

$$3^{x+3} = 3^2, \text{ entonces } x + 3 = 2 \text{ (prop. 6)}$$

$$\text{por lo tanto } x = -1$$

3. $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} =$

Solución:

Como las raíces que aparecen tienen distinto índice, se pueden igualar amplificando el índice con el exponente (prop. 10), igualando todos los índices a su m.c.m que es 6:

En $\sqrt[3]{2}$, se amplifica el índice y el exponente por 2, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$, en $\sqrt{2}$ se amplifican por 3, $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$.

Por lo que la expresión dada es equivalente a: $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}}$, por propiedades 8 y 9:

$$\frac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^2 \cdot 2^3}{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5}{2}} = \sqrt[6]{2^4}, \text{ por prop. 2: } \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{2^4}, \text{ simplificando el índice y el exponente, (prop. 10)}$$

resulta $\sqrt[3]{2^2}$.

4. Si $m > 0$ y $m > n$, entonces $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} =$

Solución:

La expresión $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2}$ se puede poner de la forma: $\sqrt{(2m - n)^2}$, como $m > 0$ y $m > n$, se tiene que

$2m > n$, por lo que $2m - n > 0$, por prop. 7: $\sqrt{(2m - n)^2} = 2m - n$.

La expresión $\sqrt{n^2 - 2mn + m^2}$ es equivalente a $\sqrt{(n - m)^2}$ pero $m > n$, por lo que $n - m < 0$, por prop. 7,

$$\sqrt{(n - m)^2} = |n - m| = m - n.$$

$$\text{Entonces } \sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} = (2m - n) - (m - n) = 2m - n - m + n = m.$$