Capítulo 2

NÚMEROS RACIONALES

Los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, mientras que los egipcios usaron, sobre todo, las fracciones con numerador igual a 1.

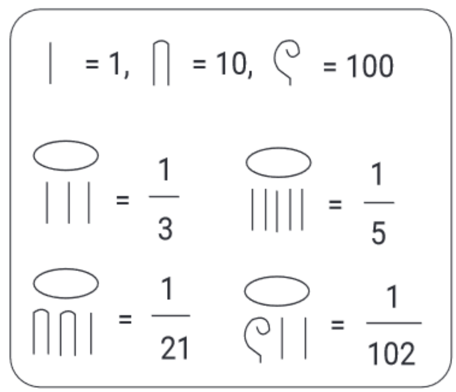
Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, es decir racionales con numerador 1, el uso de estas fracciones persisitió hasta la época medieval.

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, (ver portada cap. 8) introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones, tal como las conocemos hoy.

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los cocnocemos hoy.

A finales del siglo XVI, Simon Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales, pero los escribía de una forma no tan simple; así para 345,932 escribía 345 (0) 9(1) 3(2) 2(3).

Finalmente, los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII.



CONCEPTOS CLAVES

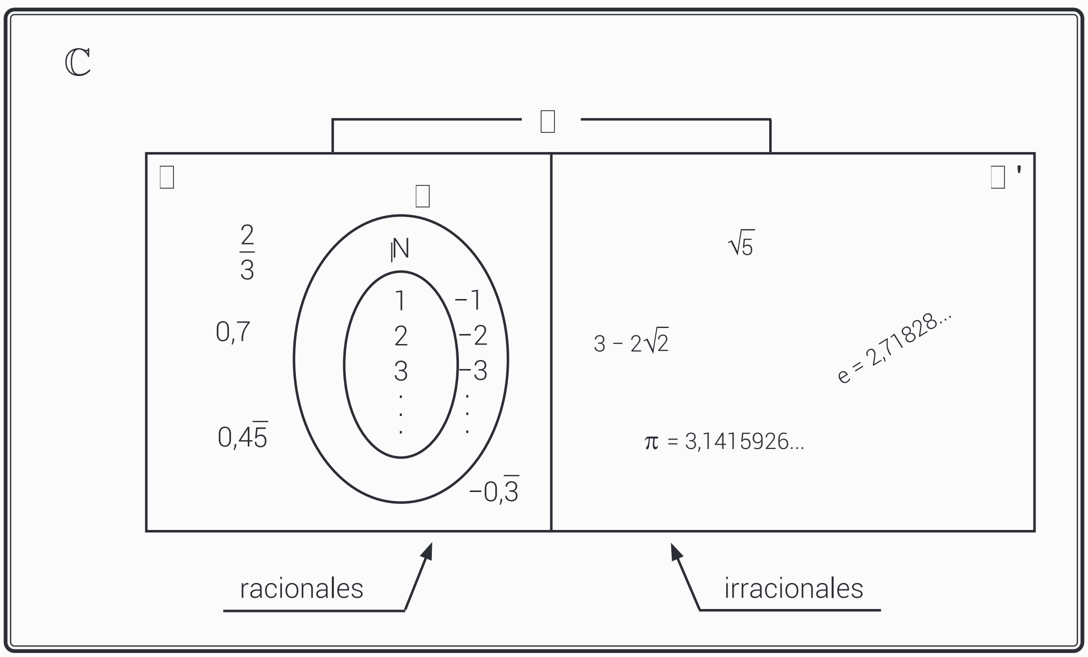
- **Conversión de decimal a fracción**
- **Propiedad de clausura**
- **Orden en los racionales**

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos más importantes son los siguientes:

CONJUNTO NUMÉRICO	DESCRIPCIÓN
Números naturales	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
Números enteros	$\mathbb{Z} = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$
Números racionales	Son aquellos números que se pueden expresar como fraccón, como los números decimales finitos, periódicos, semiperiódicos y enteros $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$
Números irracionales	Son aquellos números que no se pueden expresar como fracción, como $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 1$, π, etc., se caracterizan por tener infinitas cifras decimales sin período, este conjunto numérico se designa con la letra $\mathbb{Q}'$ o $\mathbb{I}$.
Números reales	Se designa con la letra $\mathbb{R}$ y es la unión entre los racionales e irracionales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
Números complejos	Son de la forma a+bi donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, si b=0 se obtiene un número real, por lo tanto los complejos incluyen a los números reales $\mathbb{C} = \{ z = a + bi \ / \ a \text{ y } b \in \mathbb{R} \}$

Resumiendo, tenemos el siguiente esquema:



Observación:
No son números reales las raíces de índice par de negativos, como $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-16}$, etc., ni tampoco cuando se divide por cero.

CONVERSIÓN DE DECIMAL A FRACCIÓN

En los racionales los decimales pueden ser finitos, infinitos periódicos o infinitos semiperiódicos, a continuación veremos cómo se pueden convertir a fracción:

- **Decimal finito**

Se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin considerar la coma y en el denominador colocamos un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Ejemplo: $0{,}32 = \frac{32}{100}$; $1{,}283 = \frac{1283}{1000}$.

- **Decimal infinito periódico**

Si no tiene entero, se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin la coma y en el denominador colocamos tantos nueves como cifras periódicas tenga.

En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el número entero y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga.

Ejemplo: $0{,}\overline{78} = \frac{78}{99}$; $1{,}\overline{45} = \frac{145 - 1}{99} = \frac{144}{99} = \frac{16}{11}$.

- **Decimal infinito semiperiódico**

Si no tiene entero, se escribe en el numerador la resta entre el número que forman sus cifras (sin la coma) con el anteperíodo y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga el número, seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el número que forman las cifras que no tienen período y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

Ejemplo: $0{,}3\overline{5} = \frac{35 - 3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$; $4{,}2\overline{8} = \frac{428 - 42}{90} = \frac{386}{90} = \frac{193}{45}$.

PROPIEDAD DE CLAUSURA

La propiedad de clausura en los números racionales, se refiere a que si operamos dos números racionales el resultado también es racional.

Observa que las cuatro operaciones básicas en los racionales tienen propiedad de clausura:

- Si sumamos dos racionales el resultado es racional.
- Si restamos dos racionales el resultado es racional.
- Si multiplicamos dos racionales el resultado es racional.
- Si dividimos dos racionales el resultado es racional, excepto la división por cero.

2

ORDEN EN LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales tienen el principio de tricotomía, es decir si tenemos dos números racionales, por ejemplo a y b, entonces se cumple alguna de estas posibilidades: (a > b) o (a = b) o (a < b).
Esto se traduce que si tenemos un conjunto de números racionales, siempre podemos ordenarlos, para ello existen diversas técnicas, algunas de ellas las veremos a continuación.
Si queremos comparar dos fracciones podemos multiplicar cruzado para compararlas:
$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow ad < bc$ (siempre que b, d > 0)en el caso en que sean más de dos fracciones podemos proceder como se ilustran en los primeros dos ejemplos.

Ejemplo 1: Ordenar de menor a mayor las fracciones $\frac{9}{20}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$

Para poder compararlas podemos intentar igualar denominadores, para ello calculamos el m.c.m. entre ellos y amplificamos las fracciones para que todas queden con igual denominador.
En este caso, el m.c.m. entre 8, 5 y 20 es 40, por lo tanto amplificamos para que todas las fracciones queden con denominador 40:

$$\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{18}{40};\ \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{16}{40} \text{ y } \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$$

Como $\frac{15}{40} < \frac{16}{40} < \frac{18}{40}$, se obtiene que $\frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{9}{20}$.

En el caso en que fuese complicado igualar denominadores, se puede intentar igualar numeradores, o bien convertir las fracciones a decimal.

Ejemplo 2: Ordenar los números: $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}$, y $0,4\overline{2}$

Si convertimos a fracción el decimal $0,4\overline{2}$, obtenemos $0,4\overline{2} = \frac{42-4}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$. En este caso el tratar de igualar numeradores o denominadores entre las fracciones: $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}$ y $\frac{19}{45}$ es tedioso, por lo tanto lo más aconsejable es convertir a número decimal.

$\frac{5}{12} \leftrightarrow 5 : 12 = 0,41666...$, $\frac{3}{8} \leftrightarrow 3 : 8 = 0,375$ y $\frac{19}{45}$ sabíamos que era $0,4\overline{2}$.

Como $0,375 < 0,41666... < 0,4\overline{2}$, tenemos que $\frac{3}{8} < \frac{5}{12} < 0,4\overline{2}$.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se denomina notación científica de un número decimal cuando lo expresamos de la forma $a \cdot 10^n$, donde $1 \leq |a| < 10$ y n es un número entero. Según lo anterior, tenemos que $3,2 \cdot 10^5$ es un número escrito en notación científica, mientras que $34 \cdot 10^{-8}$ no lo está debido a que 34 > 10.
La notación científica es útil para operar con números que tienen muchas cifras cero, por ejemplo si queremos dividir 0,000034 con 170.000, primero llevamos estos números a notación científica:

$$\frac{0,000034}{170.000} = \frac{3,4 \cdot 10^{-5}}{1,7 \cdot 10^{5}} = 2 \cdot 10^{-5-5} = 2 \cdot 10^{-10}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

2

1. ¿Qué porcentaje es $1{,}28 \cdot 10^{-6}$ de $32 \cdot 10^{-7}$?

A) 20 %
B) 30 %
C) 40 %
D) 60 %

Solución:
Aunque esta pregunta es de porcentaje, la incluiremos acá debido que para resolverla se requiere la operatoria con números expresados en notación científica.
Según lo visto en el capítulo anterior, si queremos calcular qué porcentaje es A de B, efectuamos el cálculo:

$\frac{A^6}{B} \cdot 100$, en este caso sería $\frac{1{,}28 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-7}} \cdot 100$, la expresión $1{,}28 \cdot 10^{-6}$ la transformaremos a $128 \cdot 10^{-8}$ para así poder operar con el denominador, entonces tenemos: $\frac{1{,}28 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-7}} \cdot 100 = \frac{\cancel{128} \cdot 10^{-8}}{\cancel{32} \cdot 10^{-7}} \cdot 100 = 4 \cdot 10^{-8-(-7)} \cdot 10^2 = 40$, luego la respuesta es la alternativa C).

2. Pedro, Juan y Diego son tres administrativos que trabajan diariamente la misma cantidad de horas. A cada uno de ellos se les encarga la misma labor, para realizarla Pedro demoró $\frac{4}{9}$ de su jornada, mientras que Juan y Diego demoraron respectivamente $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$ de su jornada, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** ?

A) Pedro es el que se demorá más.
B) Diego demoró más que Juan.
C) Pedro demoró más que Juan.
D) Diego demoró más que Pedro.

Solución:
Una forma de poder comparar estas fracciones es convertirlas a número decimal, haciendo el cuociente entre el numerador y el denominador:

Observa que $\frac{4}{9}$ por tener un denominador 9, nos queda un decimal periódico: $\frac{4}{9} = 0{,}444...$
La fracción $\frac{2}{5}$ la podemos amplificar por 2 para obtener un denominador 10: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

En $\frac{3}{7}$, como no podemos amplificarla para obtener un denominador con nueves, nueves y ceros o potencias de 10, tendremos que efectuar el cuociente entre 4 y 7 lo que nos da 0,428..., entonces $\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9}$, es decir Pedro demoró más que Diego y Diego demoró más que Juan, luego la alternativa que tiene una afirmación falsa es D).

Otras formas de resolver este ejercicio:
-Igualar denominadores: lo que en este caso no es conveniente, ya que tendrías que calcular el mcm entre 5, 7 y 9.

-Igualar numeradores: esto es más conveniente que lo anterior ya que el mcm entre 4, 2 y 3 es 12, se amplifican las fracciones para llevarlas al mismo numerador, después ocupamos que entre mayor denominador menor es la fracción.

-Comparar de 2 en 2 las fracciones, utilizando que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, si ad > bc (esto es válido cuando las fracciones son positivas).

3. Juan tiene \$50.000 en billetes de \$10.000 y \$5.000. si tiene A billetes de \$10.000, entonces ¿cuántos billetes de \$5.000 tiene?

A) 10 – A
B) 10 – 2A
C) 20 – A
D) 20 – 2A

Solución:
Supongamos que tiene x billetes de \$5.000, entonces el dinero que tiene es 10000A + 5000x que es igual a 50.000, resolvemos la ecuación 10000A + 5000x = 50000 y obtenemos que x = 10 – 2A, por lo tanto tenía (10 – 2A) billetes de \$5.000, luego la alternativa correcta es B).

4. Alberto gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo en supermercado, $\frac{2}{5}$ del resto en locomoción, la mitad de lo que le queda en arriendo, quedándole \$150.000, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Su sueldo es de \$750.000
B) Gasta \$250.000 en el supermercado.
C) Gasta en \$200.000 en locomoción.
D) Entre arriendo y locomoción gastó más de la mitad de su sueldo.

Solución:

Como gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo en el supermercado, el resto corresponde a los $\frac{2}{3}$, por lo tanto $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3}$ lo gasta en locomoción, pero $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$, es decir $\frac{4}{15}$ de su sueldo lo gasta en locomoción.

Sumamos $\frac{1}{3}$ con $\frac{4}{15}$, esto nos da $\frac{3}{5}$, por lo tanto la mitad del resto es $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$, o sea $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ lo gasta en arriendo.

Tenemos entonces que: $\frac{1}{3}$ lo gasta en el supermercado, $\frac{4}{15}$ en locomoción, $\frac{1}{5}$ en arriendo, si sumamos:

$\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, entonces lo que queda es $\frac{1}{5}$.

Si x es el total de su sueldo, entonces $\frac{1}{5}x = 150.000$, de lo que deduce que el sueldo es \$750.000 , por lo tanto A) es verdadera..

En supermercado gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo, esto es $\frac{1}{3} \cdot 750.000 = 250.000$, luego B) es verdadera.

En locomoción gasta $\frac{4}{15}$ de su sueldo, $\frac{4}{15} \cdot 750.000 = 200.000$, luego C) es verdadera.

Entre arriendo y locomoción gastó \$350.000 lo que es menos de la mitad de su sueldo, luego D) es falsa.

5. Sean a y b enteros mayores que 1, con a > b, entonces al ordenar las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b-1}$, $\frac{a+1}{b-1}$, de menor a mayor resulta

A) $\frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1} < \frac{a}{b} < \frac{b}{a}$

B) $\frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1} < \frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

C) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$

D) $\frac{a}{b} < \frac{b}{a} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$

Solución:

Como $a > b > 1$, tenemos que $\frac{a}{b} > 1$ y $\frac{b}{a} < 1$, por lo tanto $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$ ahora si comparamos $\frac{a}{b}$ con $\frac{a}{b-1}$,

tenemos que $\frac{a}{b-1} > \frac{a}{b}$, ya que $\frac{a}{b-1}$ tiene un denominador menor y los numeradores son iguales.

Por otro lado $\frac{a+1}{b-1} > \frac{a}{b-1}$, ya que el numerador es mayor y los denominadores son iguales.

Entonces $\frac{b}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$, respuesta C).