

Capítulo 16

PROBABILIDADES

Los orígenes de la probabilidad se remontan desde el siglo XVI, cuando **Gombauld**, propuso a Pascal un problema de cómo repartir las apuestas entre los jugadores antes de que el juego concluya. Actualmente, las probabilidades presentan múltiples aplicaciones en áreas tan diversas como la meteorología, la biología, la química, la astronomía, la aviación comercial, la industria farmacéutica, la medicina, la industria, la predicción de atentados terroristas, etc.



CONCEPTOS CLAVES

- Regla de Laplace
- Probabilidad de unión de eventos
- Ley de los Grandes Números
- Probabilidad de intersección de eventos

✓ REGLA DE LAPLACE

La regla de Laplace, nos permite calcular la probabilidad de un evento como el cociente entre los casos favorables y los casos totales. La restricción a esta regla es que los casos son equiprobables, es decir todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad.

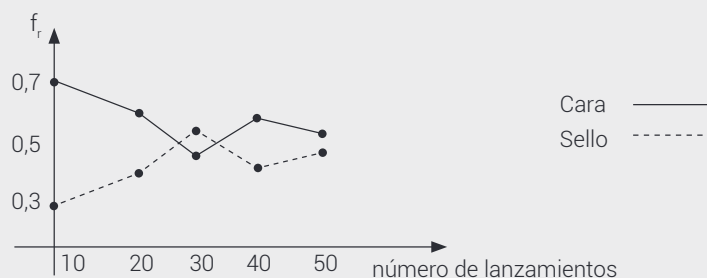
$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

Observación: si se lanza una moneda dos veces y afirmamos que los elementos del espacio muestral son cara-cara, sello-sello y cara-sello, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{1}{3}$, es un error debido a que los elementos del espacio muestral no son equiprobables. En este caso debes considerar como espacio muestral {cara-cara, sello-sello, cara-sello, sello-cara}, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{2}{4}$ o un 50%.

✓ LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La ley de los Grandes Números señala que si un experimento se repite muchísimas veces, la frecuencia relativa de la ocurrencia del suceso se irá acercando a un valor constante, ese valor constante es la probabilidad del suceso.

En la gráfica se observan, como a medida que aumentamos el número de lanzamientos de una moneda, la frecuencia relativa del número de caras y el número de sellos se acerca 0,5, lo que corresponde a la probabilidad del evento.



Ejemplo:

Supongamos que lanzamos una pareja de dados y sumamos los puntajes de ambos dados, esquemáticamente obtenemos el siguiente espacio muestral:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilidad de que los dados sumen 5 son 4 casos de 36:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Por la Ley de Laplace, tenemos que la probabilidad es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, por otra parte, por la Ley de Los Grandes Números,

si repetimos este experimento muchísimas veces, la frecuencia relativa se irá acercando a este valor.

Por ejemplo si lanzamos 3.600 veces esta pareja de dados, tendremos que aproximadamente 400 veces la suma será 5, pero no podemos asegurar que exactamente sea esa cantidad de veces.

✓ PROBABILIDAD DE UNIÓN E INTERSECCIÓN DE EVENTOS

Sean A y B dos eventos, para calcular la probabilidad de $A \cup B$, esto es, que ocurra uno o el otro, ocupamos la siguiente propiedad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Donde $A \cap B$ se refiere a que ocurran ambos eventos (intersección de los eventos).

Ejemplo:

En una fábrica hay dos turnos, el diurno y el nocturno, la distribución por sexo se muestra en la siguiente tabla:

	hombres	mujeres
diurno	32	18
nocturno	22	8

Si se elige un(a) empleado(a) al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno o sea de sexo femenino?

Solución:

La probabilidad pedida corresponde a la unión de eventos, por lo tanto tenemos que ocupar la propiedad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Tenemos que, en el turno nocturno, trabajan $22 + 8 = 30$ personas y el total de empleados es

$32 + 18 + 22 + 8 = 80$, luego $P(\text{nocturno}) = \frac{30}{80}$. Por otro lado, la probabilidad de elegir a alguien del sexo femenino

es $\frac{26}{80}$, además la probabilidad de que ocurran ambos eventos, es decir que sea del turno nocturno y sea del sexo

femenino es $\frac{8}{80}$.

Entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$.

Observación: al calcular la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno dijimos que eran 30 personas de

un total de 80, por otro lado al calcular la probabilidad de que sea de sexo femenino es 26 de 80, si sumamos

ambas cantidades, obtenemos 56 de 80, al hacerlo así estaríamos considerando las personas de sexo femenino

que trabajan en el turno nocturno en ambas cantidades, por esto debemos restar 8 de 80, de modo que

$P(A \cup B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80}$. La probabilidad de $A \cap B$ se puede calcular multiplicando las probabilidades de A y B,

solo en el caso en que los eventos sean independientes, esto es que la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \text{ solo si A y B son independientes.}$$

Por ejemplo si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 y en la moneda

salga un sello, se calcula multiplicando la probabilidad de ambos eventos, ya que la ocurrencia de uno no afecta

al otro, entonces, $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 o en la moneda salga el sello,

debemos calcularlo utilizando la propiedad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

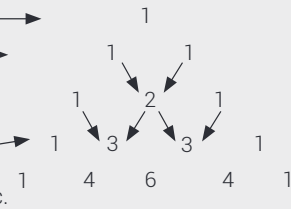
En este caso $P(4) = \frac{1}{6}$, $P(S) = \frac{1}{2}$ y por lo visto anteriormente $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

luego $P(4 \text{ o } S) = P(4) + P(S) - P(4 \text{ y } S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

✓ TRIÁNGULO DE PASCAL

El triángulo de Pascal es una configuración numérica, donde en cada fila se empieza y se termina con un uno y los términos del medio se obtienen al sumar los dos términos cercanos que están en la fila superior.

- Primera fila, ponemos un uno. 
- Segunda fila, ponemos dos unos. 
- Tercera fila, un uno al principio, otro al final y el número central es la suma de los dos unos que están en la fila superior. 
- Cuarta fila, un uno al principio, otro al final y los números del medio se obtienen sumando los números cercanos de la fila superior, etc. 



Veamos ahora, como se aplica al cálculo de probabilidades.

Supongamos que lanzamos 4 monedas, entonces nos dirigimos a la quinta fila, o bien nos podemos guiar buscando aquella fila cuyo segundo número es un 4:

	1	4	6	4	1
Ponemos entonces	C^4	C^3S	C^2S^2	CS^3	S^4

Observa que los exponentes de C van bajando mientras los de S van subiendo, pero si sumas ambos siempre se obtiene 4.

Entonces $4C^3S$, hace alusión que hay cuatro casos en que hay tres caras y un sello, $6C^2S^2$, nos indica que hay seis casos en que hay dos caras y dos sellos, $4CS^3$, indica que hay cuatro casos que hay una cara y tres sellos, etc. El total de casos se obtiene sumando todos los coeficientes:

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16.$$

De lo anterior, tenemos entonces que si lanzamos 4 monedas la probabilidad de que salgan dos

caras y dos sellos, son 6 casos de un total de 16, es decir la probabilidad es $\frac{6}{16}$ o bien $\frac{3}{8}$.

Para calcular la probabilidad de obtener a lo más dos caras, tendríamos 11 casos favorables:

1	4	6	4	1
C^4	C^3S	C^2S^2	CS^3	S^4

Luego la probabilidad es $\frac{11}{16}$.

El triángulo de Pascal lo podemos ocupar siempre que tengamos solo dos casos posibles, como cara-sello, encendido-apagado, varón-hembra, verdadero-falso, etc. Además el método visto en esta sección, es válido cuando ambos eventos son equiprobables.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En una caja hay 6 bolitas blancas y 3 rojas, en una segunda caja hay 4 bolitas blancas y 2 rojas. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{1}{3}$

Solución:

Acá tenemos que considerar dos casos favorables, sacar blanca-blanca o roja-roja.

La probabilidad de sacar una bolita blanca de la primera caja es $\frac{6}{9}$ o $\frac{2}{3}$, sacar blanca de la segunda caja

es $\frac{4}{6}$ o $\frac{2}{3}$, utilizando que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ para eventos independientes, tenemos que la probabilidad de sacar

blanca de la primera y blanca de la segunda es $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Por otro lado, sacar roja de la primera caja es $\frac{1}{3}$ y roja

de la segunda también es $\frac{1}{3}$, por lo tanto sacar bolitas rojas en ambas cajas es $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, como puede ocurrir

blanca-blanca o roja-roja, sumamos ambas probabilidades: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$, respuesta C)

2. Se ha consultado a 30 personas si endulzan su té o café con endulzante o azúcar. Las respuestas de sus preferencias se muestran en la siguiente tabla:

	Hombres	Mujeres
Azúcar	12	8
Endulzante	6	4

Si se elige uno de las personas consultadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de sexo femenino o haya elegido endulzante?

- A) $\frac{11}{15}$
 B) $\frac{2}{15}$
 C) $\frac{8}{15}$
 D) $\frac{3}{5}$

Solución:

Si "F" es el evento de ser de sexo femenino y "E" es el evento haber elegido endulzante, tenemos que calcular $P(F \cup E)$, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, entonces hay que calcular las probabilidades respectivas y ocupar esta propiedad.

Se tiene que $P(F) = \frac{12}{30}$, $P(E) = \frac{10}{30}$, $P(F \cap E) = \frac{4}{30}$,

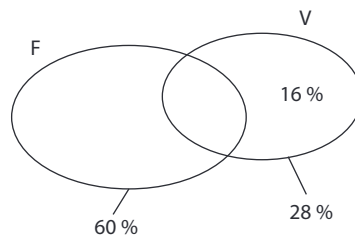
Luego $P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(F \cap E) = \frac{12}{30} + \frac{10}{30} - \frac{4}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$, respuesta D).

3. En un cierto curso, deben elegir un taller optativo para practicar fútbol o vóleibol o ambos. Si se elige un(a) alumno(a) al azar, la probabilidad de que elija fútbol es un 60%, que elija vóleibol es de un 28% y que elija vóleibol y no fútbol es un 16%, ¿cuál es la probabilidad de que elija fútbol y no vóleibol?

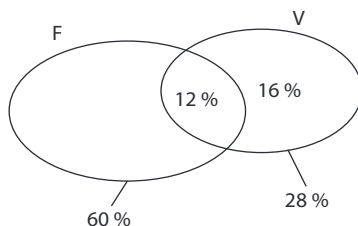
- A) 0,12
 B) 0,32
 C) 0,38
 D) 0,48

Solución:

Si ocupamos un diagrama de Venn para representar la situación, tenemos lo siguiente:



Si restamos 28% con 16% obtenemos 12%, que es la probabilidad de que practique ambos deportes:



Ahora restamos 60% con 12%, nos da 48% que sería la probabilidad de que practique fútbol pero no vóleybol, respuesta D).

4. Se tienen tres cajas: A, B y C. En A hay tres bolitas blancas y dos negras, en B hay 2 blancas y tres negras y en C hay 4 blancas y 2 negras. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar 2 bolitas blancas y una negra?

- A) $\frac{1}{5}$
 B) $\frac{2}{25}$
 C) $\frac{6}{25}$
 D) $\frac{32}{75}$

Solución:

En esta situación los casos favorables son bbn, bnb, nbb, calcularemos cada una de estas probabilidades y luego las sumamos.

Caso bbn, la probabilidad de blanca en A es $\frac{3}{5}$, blanca en B es $\frac{2}{5}$ y negra en C es $\frac{2}{6}$, entonces

$$P(bbn) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{25}, \text{ análogamente obtenemos que } P(bnb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{6}{25} \text{ y } P(nbb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{75},$$

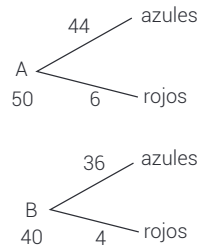
sumando las tres probabilidades, obtenemos: $\frac{2}{25} + \frac{6}{25} + \frac{8}{75} = \frac{32}{75}$, respuesta D).

5. Una librería ha comprado una partida de lápices rojos y azules de las marcas A y B. Se sabe que el total de lápices es 90, de los cuales 40 son de la marca B y hay un total de 10 rojos de los cuales 4 son de la marca B, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) Si se elige un lápiz al azar, la probabilidad de que sea rojo es $\frac{1}{9}$.
 B) Si se elige un lápiz al azar, es mayor la probabilidad de obtener un lápiz rojo en la marca A que en la marca B.
 C) Si se elige un lápiz al azar, la probabilidad de elegir uno azul de la marca B es mayor al 50%.
 D) Si se elige al azar un lápiz dentro de los azules, la probabilidad de que sea de A es un 55%.

Solución:

La información dada en el enunciado se puede ordenar en un diagrama de árbol como se muestra a continuación:



En A), el número de lápices rojos son 10 de un total de 90, luego la probabilidad es $\frac{10}{90}$ o $\frac{1}{9}$, luego A) es verdadera.

En B), la probabilidad de obtener rojo en la marca A es $\frac{6}{50} = 0,12$, mientras que en la marca B es $\frac{4}{40} = 0,1$, luego la afirmación es verdadera.

En C), la probabilidad de elegir un lápiz azul de la marca B es $\frac{36}{90}$ lo que es menor al 50%, por lo tanto C) es falsa.

En D), los lápices azules son $44 + 36 = 80$, y de estos los que son de A son 44, luego la probabilidad es $\frac{44}{80}$ o bien $\frac{11}{20}$, que equivale al 55% luego la afirmación es verdadera. Por lo tanto la falsa es C).

6. Las probabilidades de que tres basquetbolistas acierten en un tiro libre son 0,8, 0,8 y 0,9 respectivamente. Si los eventos son independientes, y cada uno lanza un tiro libre, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos acierte?

- A) 0,4%
- B) 50%
- C) 99%
- D) 99,6%

Solución:

Observa que el evento pedido es complementario al evento de que ninguno de ellos acierte.

La probabilidad de los tres no acierten es: $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,004$ (se multiplican porque son eventos independientes entre sí), por lo tanto la probabilidad de que al menos uno de ellos acierte es $1 - 0,004 = 0,996$, luego la probabilidad pedida es 99,6%, respuesta D).