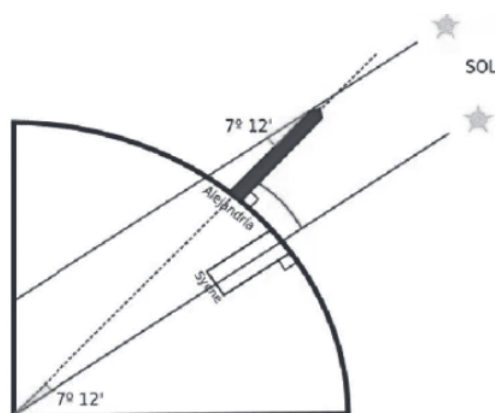


Capítulo 13

GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN



Eratóstenes, sabio griego (276 a.C- 294 a. C) utilizando geometría elemental y una simple proporción, pudo concluir que el radio de la Tierra es de 6366 km, muy cercano al valor real que es aproximadamente 6371 km.



CONCEPTOS CLAVES

- Teorema de Thales
- Razón de Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Escalas de mapas

✓ DIVISIÓN INTERIOR Y EXTERIOR DE UN TRAZO

Si P divide interiormente al trazo AB en una razón λ , se entenderá que $\frac{AP}{PB} = \lambda$



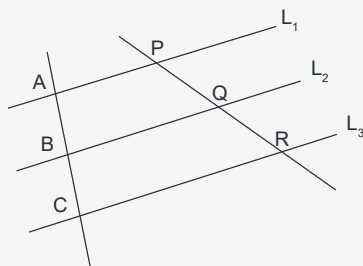
Si P divide exteriormente al trazo AB en una razón λ , se entenderá que $\frac{AP}{PB} = \lambda$ (*)



(*) Nota: si $\lambda < 1$, entonces P se ubicará a la izquierda de A y si $\lambda > 1$ se ubicará a la derecha de B, tal como se muestra en la figura.

✓ TEOREMA DE THALES

Si tenemos un conjunto de rectas paralelas y estas son cortadas por dos rectas, entonces las longitudes de los segmentos que se determinan sobre una de las rectas secantes son proporcionales a las longitudes de los segmentos que se determinan sobre la otra recta secante.

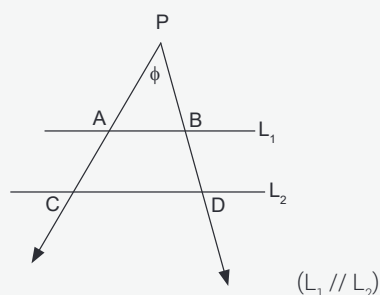


Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, entonces:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

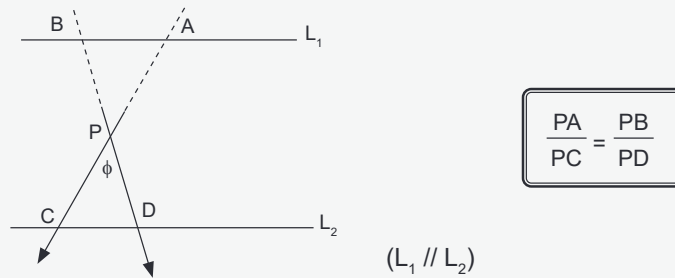
Teorema particular de Thales

Si los lados de un ángulo se cortan por dos o más paralelas entre sí, las longitudes de los segmentos que se determinan sobre una de las transversales son proporcionales a las longitudes de los segmentos que se determinan sobre la otra transversal.



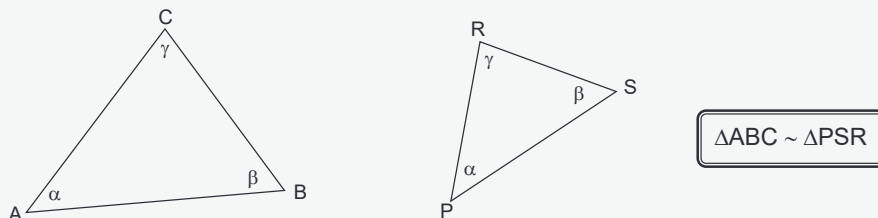
$$\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}$$

Lo anterior, también es válido si las rectas cortan a las prolongaciones de los lados del ángulo:



✓ SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes, si se puede establecer una correspondencia entre los vértices de modo que sus ángulos homólogos son congruentes y los lados homólogos son proporcionales:

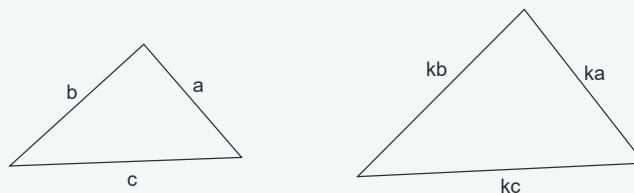


Tenemos que $\frac{AB}{PS} = \frac{BC}{SR} = \frac{AC}{PR} = k$, donde "k" es un número real positivo llamado "razón de semejanza".

Los criterios de semejanza, corresponden a la información mínima necesaria para establecer que dos triángulos son semejantes.

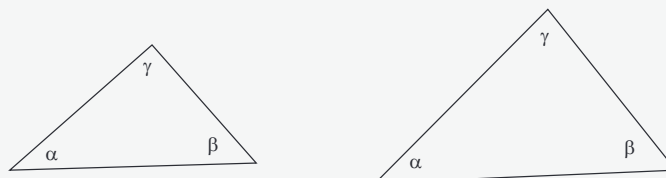
- **Criterio L - L - L**

Dos triángulos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.



- **Criterio A - A - A**

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos homólogos son congruentes.



• **Criterio L - A - L**

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos que forman estos lados congruentes.



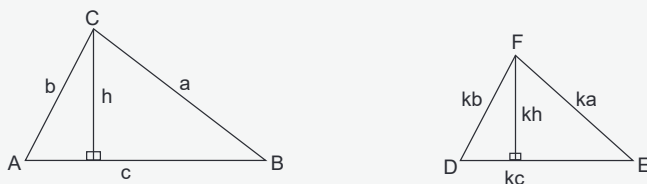
• **Criterio L - L - A**

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados congruentes.



Teorema de la semejanza

Si dos triángulos son semejantes, con razón de semejanza "k", entonces sus perímetros también están en la razón k y sus áreas están en la razón k^2 .



Observa en la figura que la razón entre los perímetros es efectivamente k:

$$\frac{\text{Perímetro } \triangle DEF}{\text{Perímetro } \triangle ABC} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = k$$

Y la razón entre sus áreas es k^2 :

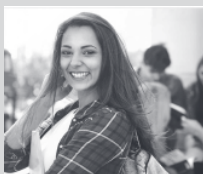
$$\frac{\text{Área } \triangle DEF}{\text{Área } \triangle ABC} = \frac{\frac{kh \cdot kc}{2}}{\frac{hc}{2}} = k^2$$

Observación: este teorema nos permite encontrar la razón entre los perímetros o las áreas de dos figuras semejantes si conocemos la razón entre dos elementos homólogos.



PORTAL EDUCATIVO

www.21temas.cl



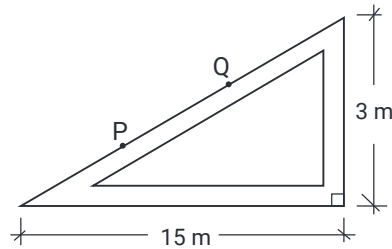
Ingresa con este código QR.
Te dirigirá al portal educativo **www.21temas.cl**
en donde debes registrarte y poderás acceder a:

- clases con contenidos
- clases con ejercicios
- videos de resolución de ejercicios propuestos
- y ¡mucho más!

EJERCICIOS RESUELTOS

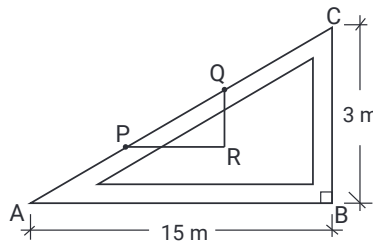
1. En la figura, se muestra la vista lateral de un techo, ¿cuánto se debe avanzar horizontalmente para ir desde el punto P al punto Q, si Q está a 2 m más alto que Q?

- A) 6 m
- B) 10 m
- C) 12 m
- D) 15 m



Solución:

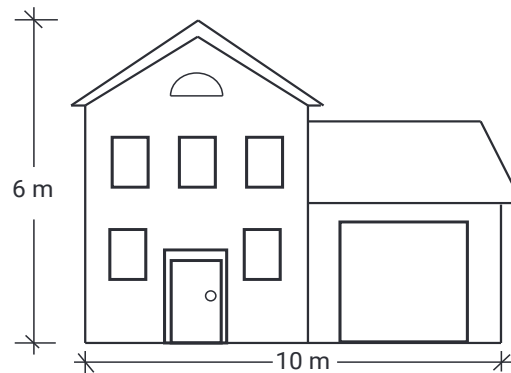
Si trazamos una línea horizontal por P y una vertical por Q tenemos la siguiente situación:



Tenemos entonces que el triángulo $\triangle PRQ$ es semejante al triángulo $\triangle ABC$ y $QR = 2$ m, entonces:

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{AB}{BC} \leftrightarrow \frac{PR}{2} = \frac{15}{3} \leftrightarrow PR = 10 \text{ m, respuesta B).}$$

2. Pablo un arquitecto, hará un plano de la casa cuya fachada se muestra a continuación. Si el plano lo hará a escala 1 : 50, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



- A) El ancho de la casa en el plano será de 20 cm.
- B) El alto de la casa en el plano será de 12 cm.
- C) Si el área de la puerta de entrada es 3 m^2 , entonces en el plano será de 12 cm^2 .
- D) Si la cantidad de vidrio de todas las ventanas es 12 m^2 , en el plano será de $0,48 \text{ m}^2$.

Solución:

En A), como la escala es 1 : 50, debemos dividir la longitud real por 50 para obtener la longitud en el plano, como $10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$, dividimos $1000 : 50 = 20$, luego A) es verdadera.

En B), efectuando el mismo análisis que en A), $6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$, $600 : 50 = 12 \text{ cm}$, luego B), también es verdadera.

Como C) hace alusión a áreas, ocuparemos que la razón entre las áreas del objeto real y en el plano corresponde al cuadrado de la escala, como $3 \text{ m}^2 = 30000 \text{ cm}^2$, tenemos:

$$\frac{\text{área puerta en el plano}}{\text{área puerta en la realidad}} = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \leftrightarrow \frac{x}{30.000} = \frac{1}{2.500} \leftrightarrow x = 12 \text{ cm}^2, \text{ luego C) es verdadera.}$$

Para D), ocuparemos la misma estrategia que en C):

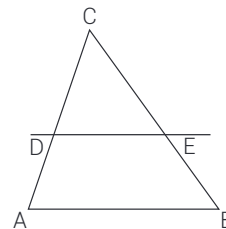
$$\frac{\text{área puerta en el plano}}{\text{área puerta en la realidad}} = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \leftrightarrow \frac{x}{120.000} = \frac{1}{2.500} \leftrightarrow x = 48 \text{ cm}^2, \text{ como } 10.000 \text{ cm}^2 = 1 \text{ m}^2, \text{ entonces}$$

$48 \text{ cm}^2 = 0,0048 \text{ m}^2$, luego D) es falsa.

3. En la figura, las rectas AD y BE se intersectan en C y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.

Si $CE = 10 \text{ cm}$, $BE = 5 \text{ cm}$ y $\text{área } \triangle DEC = 60 \text{ cm}^2$, ¿cuál es el área del trapecio ABED?

- A) 30 cm^2
- B) 75 cm^2
- C) 90 cm^2
- D) 135 cm^2

**Solución:**

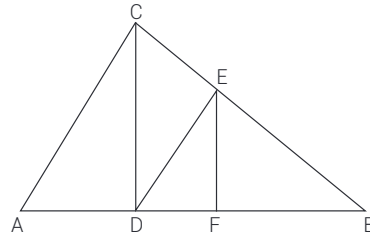
Tenemos que los triángulos ABC y DEC son semejantes (A, A, A), además como $CE : EB = 2 : 1$, entonces $CE : CB = 2 : 3$, por lo tanto la razón de semejanza entre estos triángulos es $2 : 3$ y por el teorema de la semejanza la razón entre sus áreas será $4 : 9$. Como el área del DEC es 60 cm^2 , planteamos una proporción:

$$\frac{\text{área } \triangle DEC}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{60}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \text{área } \triangle ABC = \frac{9 \cdot 60}{4} = 135 \text{ cm}^2$$

Como $\text{área } \triangle ABC = 135 \text{ cm}^2$ y $\text{área } \triangle DEC = 60 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{área ABED} = 135 - 60 = 75 \text{ cm}^2$, respuesta B).

4. El $\triangle ABC$ de la figura es rectángulo en C , los puntos D y F están en $\overline{AB}$ y E en $\overline{BC}$, de modo que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ y $\overline{EF} \perp \overline{AB}$. Si $CD = 9$ cm y $EF = 4$ cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{DE}$?

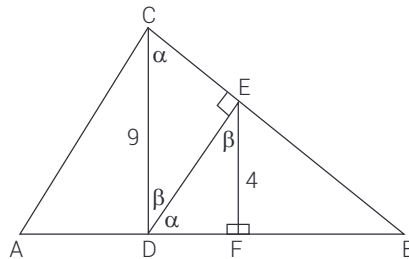
- A) 5 cm
- B) 6 cm
- C) 7,5 cm
- D) 8 cm



Solución:

Tal como se muestra en la siguiente figura, los triángulos CED y DFE son semejantes por tener sus ángulos homólogos congruentes.

Si $\angle DCE = \alpha$ y $\angle CDE = \beta$, entonces $\angle EDF = \alpha$ y $\angle DEF = \beta$:



Por la semejanza de triángulos, tenemos que:

$$\frac{CD}{DE} = \frac{ED}{FE} \rightarrow \frac{9}{DE} = \frac{ED}{4}, \text{ multiplicando cruzado, tenemos que } DE^2 = 36 \rightarrow DE = 6 \text{ cm, respuesta B).}$$