

Capítulo 12

VECTORES EN EL PLANO Y TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS



M. C. Escher (1898 - 1972) fue un destacado artista, en muchas de sus afamadas obras se destaca el uso de las transformaciones isométricas como la traslación, la reflexión y una rotación, las que serán materia de estudio del presente capítulo.

CONCEPTOS CLAVES

- Vectores en el plano
- Reflexión con respecto a una recta
- Adición y sustracción de vectores
- Reflexión con respecto a un punto
- Longitud o norma de un vector
- Giro o rotación con respecto a un punto
- Traslación

✓ ELEMENTOS BÁSICOS

- **Vector geométrico**

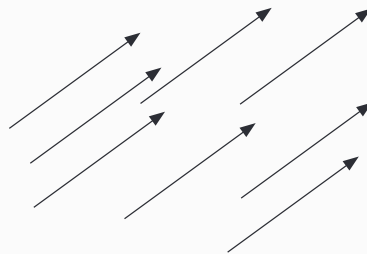
Un vector geométrico se distingue por tener un punto inicial (u origen), un punto final, una dirección, un sentido y una magnitud.



La magnitud o "largo" del vector también se denomina longitud o norma.

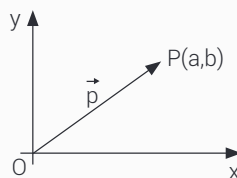
- **Vectores equipolentes**

Son aquellos que tienen igual dirección, sentido y magnitud.



- **Vector de posición**

Supongamos que tenemos un punto P en el plano cartesiano bidimensional o en el espacio tridimensional, el vector cuyo punto inicial es el origen del sistema cartesiano y el punto final es el punto P, se llama vector de posición del punto P y generalmente se designa utilizando la letra minúscula que designa al punto:

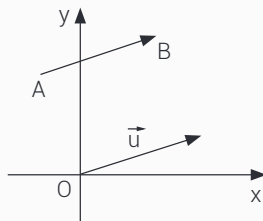


Como hay una correspondencia biunívoca entre los puntos y los vectores de posición, cuando hablemos de vectores en un sistema cartesiano, podemos referirnos ya sea a la flecha que va desde el origen al punto o bien a las coordenadas del punto al cual estamos haciendo referencia.

En la figura, cuando hablamos del vector $\vec{p}$, podemos referirnos a $\overrightarrow{OP}$ en el sentido geométrico o a las coordenadas del punto P, es decir $\vec{p} = (a,b)$.

• Vector libre

Un vector libre es aquél cuyo punto inicial no coincide con el origen del sistema cartesiano. Todo vector se puede asociar a un vector equipolente con él, cuyo punto inicial sea el origen del sistema cartesiano.



El vector libre $\overrightarrow{AB}$ es equipolente al vector $\vec{u}$

✓ IGUALDAD Y OPERATORIA ENTRE VECTORES

• Igualdad de vectores

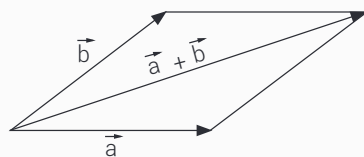
Dos vectores son iguales cuando sus respectivas coordenadas son iguales:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

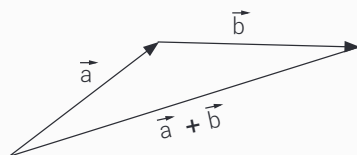
• Adición de vectores

Para sumar dos vectores se aplica la ley del triángulo o la ley del paralelogramo, de acuerdo a la posición en que se encuentran los vectores.

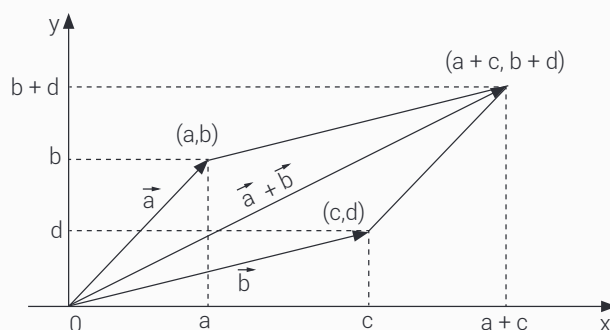
Si los vectores tienen el punto de partida en común, ocupamos la ley del paralelogramo:



Si el punto de llegada de uno de los vectores coincide con el punto de inicio del otro, ocupamos la ley del triángulo:



Si se trata de sumar vectores dados en coordenadas, la suma se obtiene sumando las coordenadas respectivas:

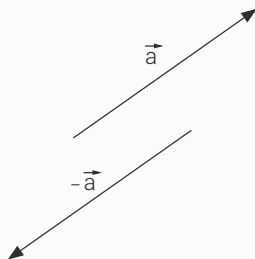


En $\square$ 2:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

• Sustracción de vectores

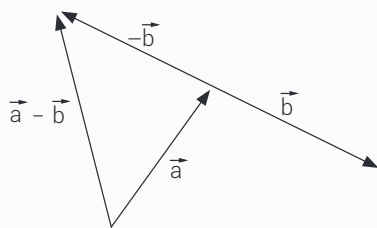
El inverso aditivo u opuesto de un vector es aquél que tiene misma dirección, misma longitud, pero distinto sentido. El opuesto de $\vec{a}$ es el vector $-\vec{a}$:



Ahora, para restar dos vectores, al primero se le suma el opuesto del segundo

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Geométricamente, la resta de vectores se visualiza de la siguiente forma:

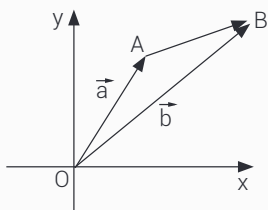


Cuando los vectores están dados por sus coordenadas, la resta se obtiene restando las coordenadas respectivas:

$$\text{En } \mathbb{R}^2: (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

12

Es importante considerar que si tenemos dos puntos en $\mathbb{R}^2$, podemos determinar un vector libre $\vec{AB}$, restando el vector de posición de B con el vector de posición de A (punto final menos el punto inicial):



Observa en la figura que

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

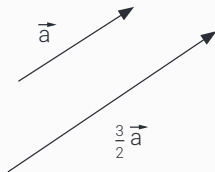
$$\text{Si } A(a_1, a_2) \text{ y } B(b_1, b_2) \leftrightarrow \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

• Ponderación de un vector

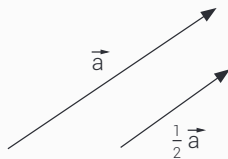
La ponderación es una operación entre un escalar (lo que asumiremos en este caso que es un número real) y un vector.

Si tenemos un vector $\vec{a}$ y lo ponderamos por el escalar λ , obtenemos el vector $\lambda\vec{a}$, el cual tiene la misma dirección que $\vec{a}$, pero su sentido y el módulo pueden variar dependiendo de la magnitud y signo del escalar (siempre que $\lambda \neq 0$). Geométricamente, tenemos las siguientes situaciones:

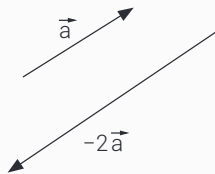
Si $\lambda > 1$, el vector conserva el sentido y aumenta su módulo:



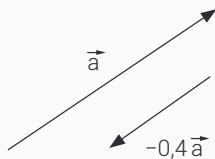
Si $0 < \lambda < 1$, el vector conserva el sentido y disminuye su módulo:



Si $\lambda < -1$, el vector, cambia el sentido y aumenta su módulo:



Si $-1 < \lambda < 0$, el vector conserva la dirección, cambia el sentido y disminuye su módulo:



En el caso que los vectores estén dados por sus coordenadas, entonces multiplicamos el ponderador, con cada una de sus coordenadas:

$$\lambda (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

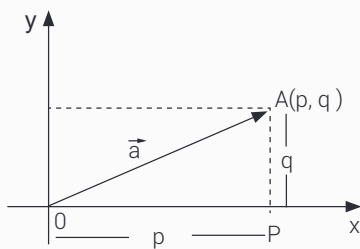
✓ LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

La longitud o norma de un vector es la distancia que hay entre el punto de partida y el punto de llegada y se designa con el símbolo $\|\vec{a}\|$ o bien $|\vec{a}|$.

Si los vectores están dados en términos de sus coordenadas, tenemos que

$$\text{Si } \vec{a} = (p, q) \leftrightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{p^2 + q^2}$$

En el $\triangle OPA$, utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que $OA^2 = OP^2 + PA^2$, entonces $OA = \sqrt{p^2 + q^2}$.



$$|OA| = \|\vec{a}\| = \sqrt{p^2 + q^2}$$

✓ DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Para calcular la distancia entre dos puntos, tenemos la siguiente expresión:

$$\text{Si } A(x_1, y_1) \text{ y } B(x_2, y_2), \text{ entonces } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

12

✓ PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Para calcular el punto medio entre dos puntos, tenemos la siguiente expresión:

$$\text{Si } A(x_1, y_1) \text{ y } B(x_2, y_2), \text{ entonces el punto medio } M \text{ es } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

✓ TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

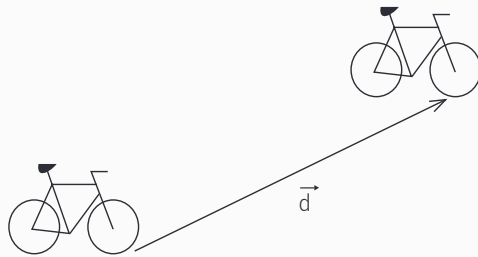
Las transformaciones isométricas en el plano son cuatro:

1. Traslación
2. Reflexión con respecto a una recta o simetría axial.
3. Reflexión con respecto a un punto o simetría puntual.
4. Giro o rotación.

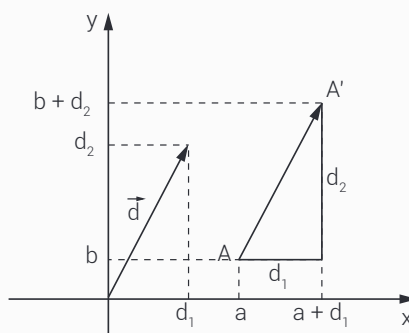
Las isometrías o transformaciones isométricas convierten a una figura en otra que resulta ser congruente con la original.

• Traslación

Cuando efectuamos una traslación, todos los puntos de la figura se mueven según una cierta dirección, la cual queda determinada por el vector dirección:

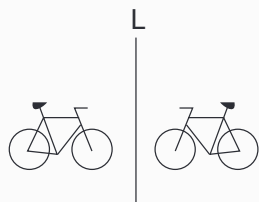


En un sistema cartesiano, la dirección queda determinada por un vector dado como par ordenado. Si al punto (a, b) lo trasladamos en la dirección (d_1, d_2) , entonces queda en el punto $(a + d_1, a + d_2)$.



• **Reflexión con respecto a una recta (Simetría Axial)**

En este caso la transformación produce el "efecto espejo":

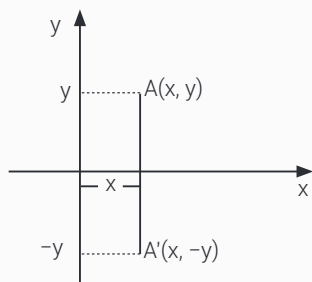


La figura de la izquierda se ha reflejado con respecto a la recta L , o se le ha aplicado una simetría o bien una simetría axial, quedando convertida en la figura de la derecha.

En un sistema cartesiano, es útil saber las siguientes simetrías axiales:

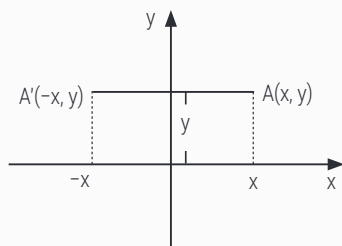
- A) Simetría con respecto al eje x

En este caso el punto (x, y) queda en el punto $(x, -y)$:



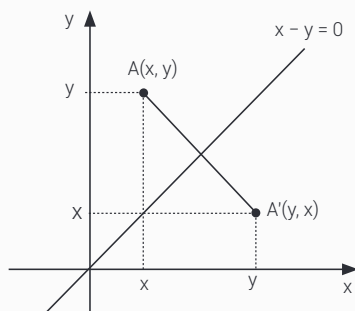
- B) Simetría con respecto al eje y

El punto (x, y) queda en el punto $(-x, y)$:



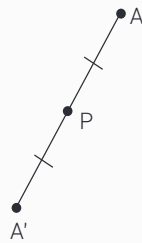
- C) Simetría con respecto a la recta de ecuación $x - y = 0$

En este caso el punto (x, y) queda en el punto (y, x) :

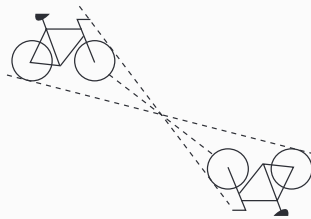


- Reflexión con respecto a un punto (Simetría puntual)**

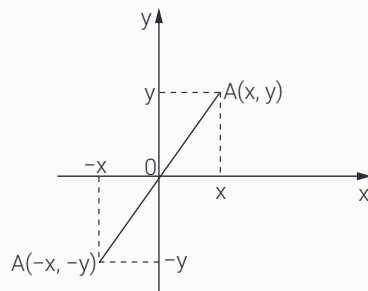
Si a un punto A le aplicamos una simetría con respecto a P, entonces su imagen quedará en la recta $\overleftrightarrow{AP}$, de modo que P es el punto medio entre A y su imagen.



Si a una figura le aplicamos una reflexión con respecto a un punto, entonces la figura quedará girada en 180° con respecto a este punto.



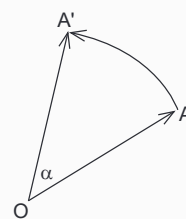
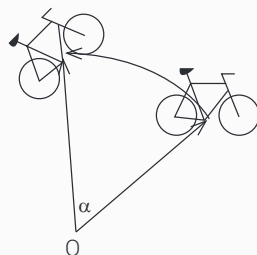
En un sistema cartesiano, cuando a un punto (x, y) se le aplica una reflexión con respecto al origen, queda en el punto $(-x, -y)$:



- Rotación o giro con respecto a un punto**

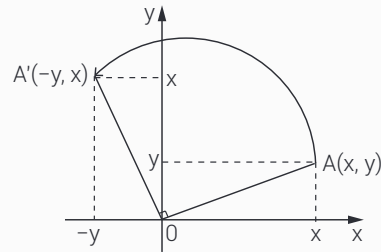
Si el punto A se gira en α° con respecto al punto O de la figura, entonces queda en un punto A' de modo que $OA = OA'$ y $\angle AOA' = \alpha$.

Se entenderá, a no ser que se indique lo contrario, que el sentido del giro es contrario al sentido del movimiento de las manecillas del reloj (sentido antihorario).

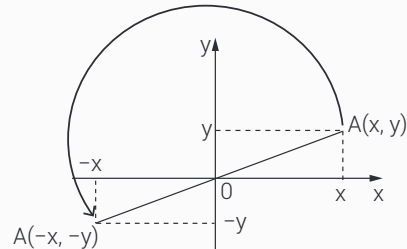


A continuación se muestran las rotaciones en sentido antihorario con respecto al origen para ángulos de 90° , 180° y 270° .

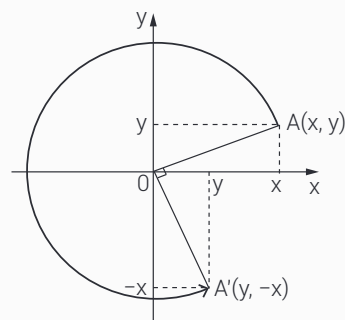
- A) Rotación en 90°
El punto (x, y) queda en el $(-y, x)$:



- B) Rotación en 180°
El punto (x, y) queda en el $(-x, -y)$:



- C) Rotación en 270°
El punto (x, y) queda en el $(y, -x)$:

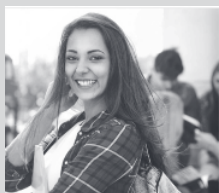


Nota que la rotación en 270° en sentido antihorario es equivalente a un giro en 90° en sentido horario.



PORTAL EDUCATIVO

www.21temas.cl



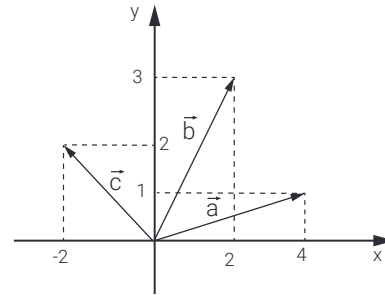
Ingresa con este código QR.
Te dirigirá al portal educativo www.21temas.cl
en donde debes registrarte y poderas acceder a:

- clases con contenidos
- clases con ejercicios
- videos de resolución de ejercicios propuestos
- y ¡mucho más!

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura, se muestran la ubicación de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en un plano cartesiano, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$
 B) $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 5$
 C) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a} + \vec{c}|$
 D) $(2\vec{a} - 3\vec{b})$ está en el tercer cuadrante.

**Solución:**

Según la información dada en la figura, tenemos que $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (2, 3)$ y $\vec{c} = (-2, 2)$, entonces

$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (4, 1) - (2, 3) + (-2, 2) = 0$, luego A) es verdadera.

Para B), $\vec{a} - 2\vec{b} = (4, 1) - 2 \cdot (2, 3) = (4, 1) - (4, 6) = (0, -5)$, entonces $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$, luego es verdadera.

En C), $\vec{a} + \vec{b} = (6, 4) \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) \rightarrow |\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, por lo tanto $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a} + \vec{c}|$, luego C) es verdadera.

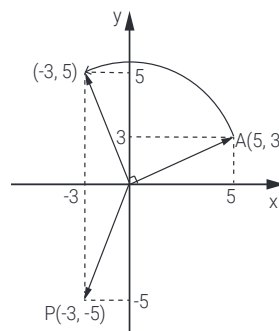
En D), $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \cdot (4, 1) - 3 \cdot (2, 3) = (2, -7)$ y este vector está en el cuarto cuadrante, luego D) es falsa.

2. El punto A(5, 3) se rota en 90° en sentido antihorario y después se le aplica una simetría axial con respecto al eje x quedando finalmente en el punto P. ¿en que dirección se debe trasladar el punto A para que quede en el punto P?

- A) (6, 0)
 B) (0, 10)
 C) (-8, -8)
 D) (6, -10)

Solución:

Si el punto (x, y) se gira en torno al origen en 90° en sentido antihorario queda en el punto $(-y, x)$, luego el punto A(5, 3) queda en el $(-3, 5)$ y si este punto se refleja en torno al eje x queda en el $P(-3, -5)$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Ahora si queremos calcular la dirección en que se debe trasladar el punto A para que quede en el punto P, debemos restar las coordenadas de P con las coordenadas de A: $(-3, -5) - (5, 3) = (-8, -8)$, luego la alternativa correcta es C).

3. Un punto $A(x, y)$ se refleja con respecto al eje x , quedando en el punto B , ¿cuál de las siguientes transformaciones **NO** permiten que el punto A quede en el punto B ?

- A) Una traslación en la dirección $(0, -2y)$.
- B) Una reflexión respecto del eje y , después una simetría puntual respecto del origen.
- C) Un giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen y después una traslación en la dirección $(x + y, -x - y)$.
- D) Una traslación en la dirección $(-2x, -2y)$ y después una reflexión en torno al eje x .

Solución:

Sabemos que si reflejamos el punto (x, y) con respecto al eje x queda en el $(x, -y)$, veamos cual de las alternativas no deja el punto en esta posición.

En A) si el punto (x, y) se traslada en la dirección $(0, -2y)$ queda en el punto $(x, y) + (0, -2y) = (x, -y)$, luego esta alternativa no es.

En B) si el punto (x, y) lo reflejamos en torno al eje y queda en el $(-x, y)$ y si a este punto lo reflejamos en torno al origen queda en el $(x, -y)$, luego esta alternativa tampoco es.

En C) si giramos el punto (x, y) en 90° en sentido antihorario respecto del origen queda en el punto $(-y, x)$ y si este punto lo trasladamos en la dirección $(x + y, -x - y)$ queda en el punto $(-y, x) + (x + y, -x - y) = (x, -y)$, luego esta alternativa no es.

En D) si el punto (x, y) lo trasladamos en la dirección $(-2x, -2y)$, queda en el punto $(x, y) + (-2x, -2y) = (-x, -y)$ y si este punto lo reflejamos en torno al eje x queda en el $(-x, y)$, luego esta alternativa no permite que el punto quede en el $(x, -y)$.

4. A un punto se le efectúa una traslación en la dirección $(-2, 3)$, luego se le aplica una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, quedando en el punto $(2, 5)$, ¿cuál era el punto inicial?

- A) $(7, 5)$
- B) $(7, -5)$
- C) $(-7, -1)$
- D) $(0, 2)$

Solución:

Supongamos que el punto inicial era (a, b) , al aplicarle una traslación en la dirección $(-2, 3)$ queda en el punto $(a - 2, b + 3)$. Por otro lado, al aplicarle un giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, el punto (x, y) queda en el punto $(-y, x)$, en este caso, el punto $(a - 2, b + 3)$ quedará en el punto $(-(b + 3), a - 2)$, si igualamos este punto al $(2, 5)$, obtenemos que $-(b + 3) = 2$ y $a - 2 = 5$.

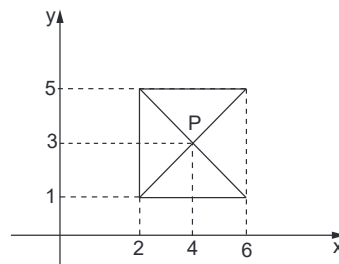
Resolviendo estas ecuaciones, se concluye que $a = 7$ y $b = -5$, por lo tanto el punto inicial era el $(7, -5)$, luego la alternativa correcta es B). Otra forma de resolver este ejercicio, es aplicando las transformaciones inversas desde el punto final hasta llegar el punto inicial; es decir al $(2, 5)$ le aplicamos primero un giro en sentido horario con respecto al origen, luego al punto obtenido le aplicamos una traslación según la dirección $(2, -3)$, obteniéndose de esta forma el punto inicial.

5. ¿Cuál de las siguientes transformaciones **NO** permite que el punto $(6, 5)$ quede en el punto $(2, 1)$?

- A) Una traslación según la dirección $(-4, -4)$.
- B) Una reflexión con respecto al punto $(4, 3)$.
- C) Una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al punto $(2, 5)$.
- D) Una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al punto $(6, 1)$.

Solución:

En A) podemos obtener la dirección de traslación restando el punto final $(2, 1)$ con el punto inicial $(6, 5)$, $\vec{d} = (2, 1) - (6, 5) = (-4, -4)$, por lo tanto A) es correcta. Para ver si las restantes alternativas son verdaderas, nos ayudaremos con la figura que se presenta a continuación, aunque se pueden utilizar otros métodos que no la requieren.



Observa que el punto $(4, 3)$ es el punto medio entre el $(6, 5)$ y el $(2, 1)$, por lo tanto el $(2, 1)$ se puede obtener a partir del $(6, 5)$ través de una reflexión con respecto al $(4, 3)$, por lo tanto B) es verdadera.

Para las siguientes alternativas, podemos utilizar que la figura que se forma es un cuadrado, por lo tanto C) es falsa, ya que habría que girar el punto $(6, 5)$ en torno al $(2, 5)$ en 90° en sentido horario y no antihorario.

Para D) si giramos el punto $(6, 5)$ en 90° sentido antihorario con respecto al punto $(6, 1)$ obtenemos el $(2, 1)$, luego es verdadera. En conclusión, C) es falsa.