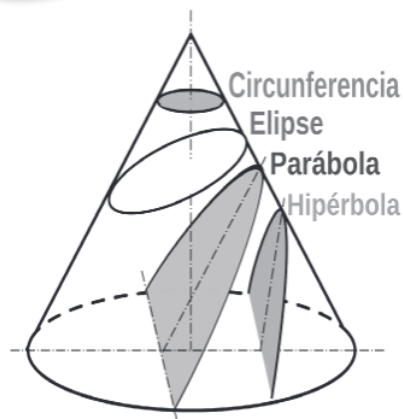


Capítulo 10

FUNCIÓN CUADRÁTICA



Apolonio de Perga, (262 a.C? - 190 a.C?), en su gran obra, conocida como "Las Cónicas", realizó un amplio estudio acerca de las curvas que se originan al cortar un cono por un plano, estas curvas se denominan secciones cónicas, que pueden ser un círculo, una elipse, una parábola y una hipérbola. En este capítulo estudiaremos particularmente las parábolas, que son las curvas que resultan al graficar funciones cuadráticas.



CONCEPTOS CLAVES

- **Función cuadrática**
- **Forma canónica**
- **Intersecciones con los ejes**
- **Máximo y mínimo**
- **Eje de simetría y vértice**
- **Relación entre los coeficientes de la función cuadrática y el gráfico**

✓ GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) y su gráfica es una parábola.

• Concavidad

Las ramas de la parábola se abren hacia arriba o hacia abajo, dependiendo si el signo de a es positivo o negativo:



$$a > 0$$

las ramas se abren hacia arriba

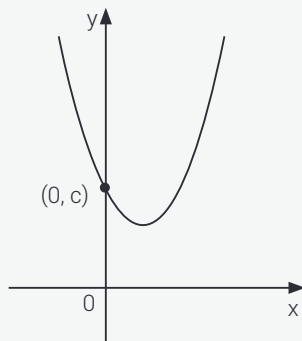


$$a < 0$$

las ramas se abren hacia abajo

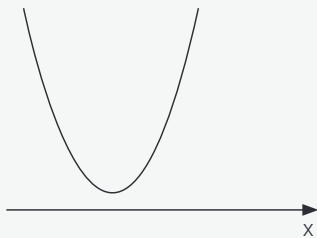
• Intersección con eje y

La intersección de la gráfica con el eje y es el punto $(0, c)$:



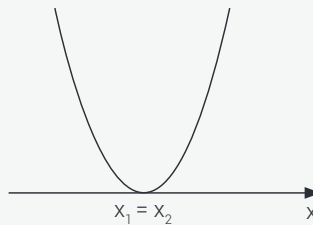
• Intersección con eje x

Las intersecciones de la gráfica de la función cuadrática, llamados ceros de la función, corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada a la función, estos pueden ser dos, uno o ninguno, dependiendo del signo del discriminante, como lo habíamos visto anteriormente.



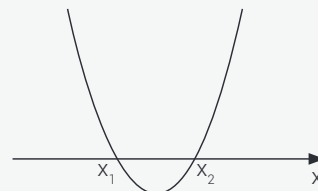
$$b^2 - 4ac < 0$$

La parábola no interseca
al eje x



$$b^2 - 4ac = 0$$

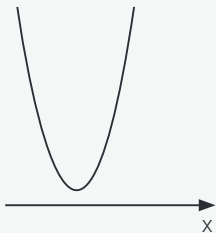
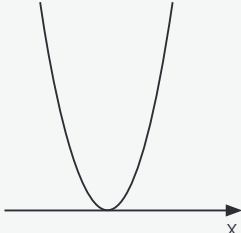
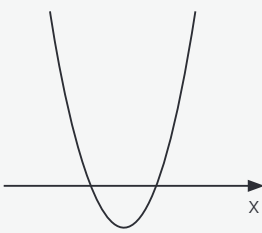
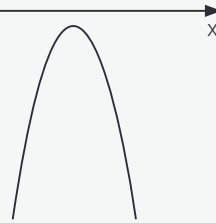
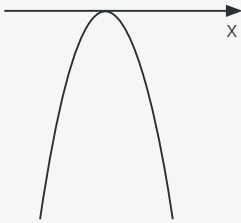
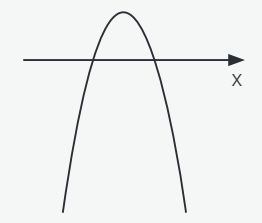
La parábola es tangente
al eje x



$$b^2 - 4ac > 0$$

La parábola interseca al eje
x en dos puntos

Considerando el signo del coeficiente cuadrático y del discriminante, tenemos entonces los siguientes casos:

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

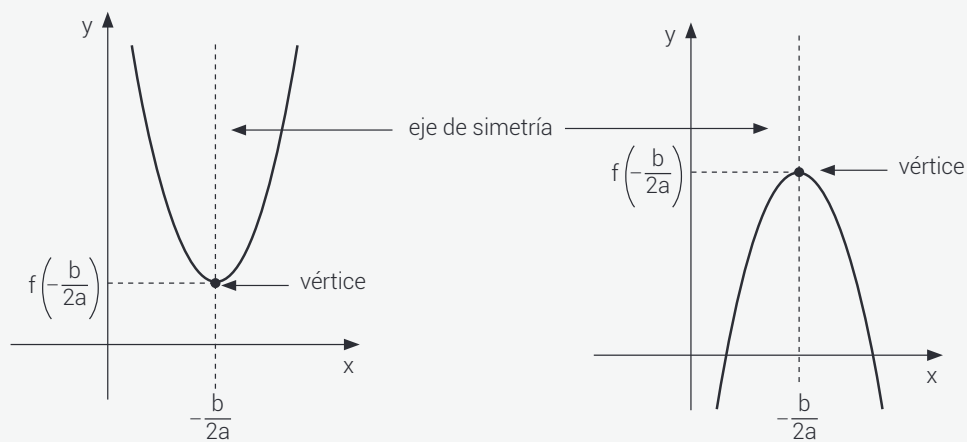
• **Vértice y eje de simetría**

El vértice es el punto más bajo en la gráfica cuando $a > 0$ y es el punto más alto cuando $a < 0$.

La abscisa del vértice corresponde a $x = -\frac{b}{2a}$ y su ordenada se puede calcular mediante

$$y = f\left(-\frac{b}{2a}\right), \text{ o bien } y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y , su ecuación es $x = -\frac{b}{2a}$.



• **Máximo o mínimo**

Tanto el mínimo como el máximo de la función cuadrática se encuentran en el vértice, pero habrá un mínimo cuando $a > 0$ y un máximo cuando $a < 0$.

Caso $a > 0$	Caso $a < 0$
Acá la función tiene un mínimo y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right) \text{ o bien } \frac{4ac - b^2}{4a}$	Acá la función tiene un máximo y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right) \text{ o bien } \frac{4ac - b^2}{4a}$

• **Dominio y Recorrido**

El dominio de la función $y = f(x)$ corresponde al conjunto de todos los valores de x y el recorrido corresponde a todos los valores de las imágenes.

El dominio de una función cuadrática corresponde al conjunto de los reales, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

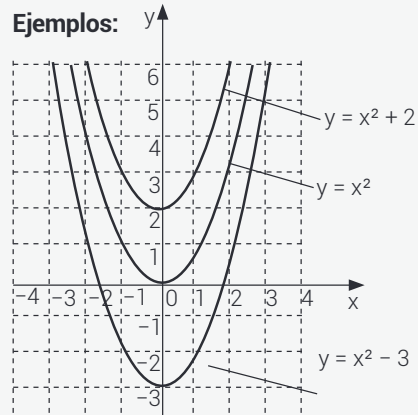
Mientras que el recorrido de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, depende del signo de a :

Caso $a > 0$	Caso $a < 0$
Recorrido: $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty \right[$	Recorrido: $\left] -\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$

✓ TRASLACIONES A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

• Traslación vertical

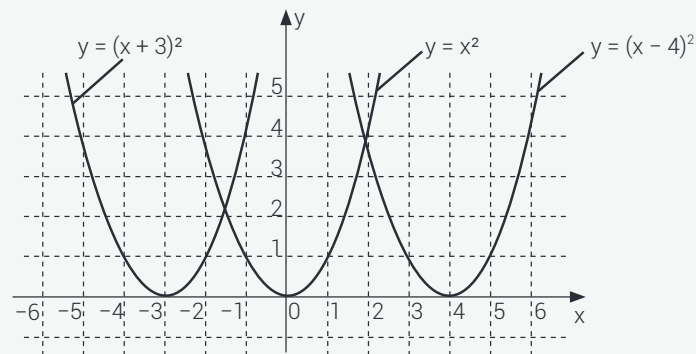
Si a una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia arriba y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia abajo.



• Traslación horizontal

Si a la variable "x" de una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia la izquierda y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia la derecha.

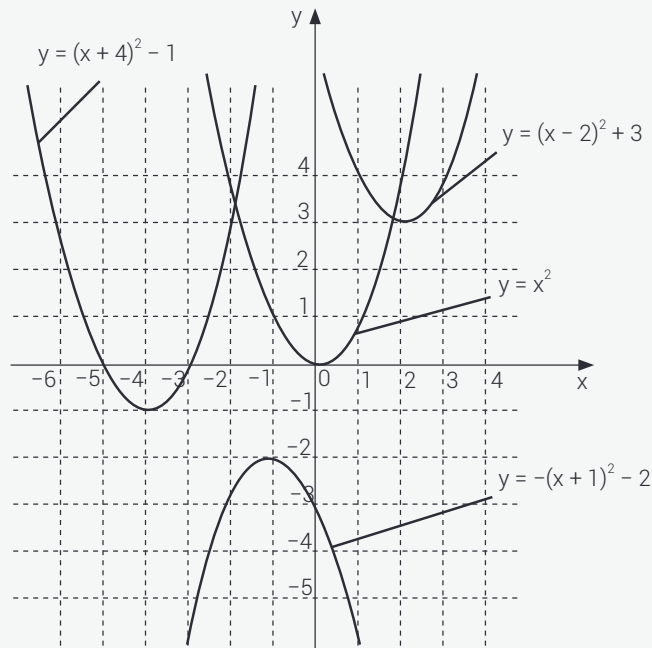
Ejemplos:



✓ FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática de la forma: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ se denomina la forma canónica de una función cuadrática. Por lo visto anteriormente, si h y k son números reales positivos entonces la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ corresponde al gráfico de $f(x) = ax^2$ trasladado " h " unidades la derecha y " k " unidades hacia arriba.

Ejemplos:

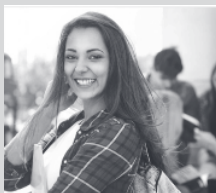


10



PORTAL EDUCATIVO

www.21temas.cl



Ingresa con este código QR.
Te dirigirá al portal educativo www.21temas.cl
en donde debes registrarte y poderas acceder a:

- clases con contenidos
- clases con ejercicios
- videos de resolución de ejercicios propuestos
- y ¡mucho más!

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = -x^2 + 6x - 9$, con respecto a la gráfica de esta función, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) Intercepta al eje x en un solo punto.
- B) Su vértice es el punto $(3, 0)$.
- C) Pasa por el punto $(2, -1)$.
- D) Intercepta al eje y en el punto $(-9, 0)$

Solución:

Para determinar en cuántos puntos la parábola intercepta al eje x calculamos el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, en este caso $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$, como $\Delta = 0$, la parábola intersecta al eje x en un solo punto, luego A) es verdadera.

Para calcular el vértice, utilizamos que la abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a}$, en este caso $x = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$, reemplazando en la función, obtenemos: $f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0$, luego el vértice es el punto $(3, 0)$, por lo tanto B) es verdadera.

Para C) reemplazamos $x = 2$ en la función, $f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = -4 + 12 - 9 = -1$, luego C) es verdadera.

Para D) consideremos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersecta al eje y en el punto $(0, c)$ en este caso sería $(0, -9)$ y no $(-9, 0)$, luego D) es falsa.

2. Sea la función definida en los reales mediante $f(x) = -(x - 3)^2 + 6$, con respecto a su gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) Su vértice es el punto $(-3, 6)$.
- B) Pasa por el punto $(2, 7)$.
- C) Intercepta al eje y en el punto $(0, 6)$.
- D) Intercepta al eje x en dos puntos.

Solución:

Notemos que la función está en su forma canónica: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde (h, k) es el vértice de la gráfica de esta función, en este caso $h = 3$ y $k = 6$, luego el vértice es el punto $(3, 6)$, luego A) es falsa.

Para B) reemplacemos $x = 2$ en la función, $f(2) = -(2 - 3)^2 + 6 = 5$, según lo que indica esta alternativa $f(2) = 7$, luego es falsa.

En C) si desarrollamos la expresión $-(x - 3)^2 + 6$, obtenemos $-x^2 + 6x - 3$, como $c = -3$, la gráfica de función cuadrática intercepta al eje y en el $(0, -3)$, luego esta alternativa es falsa.

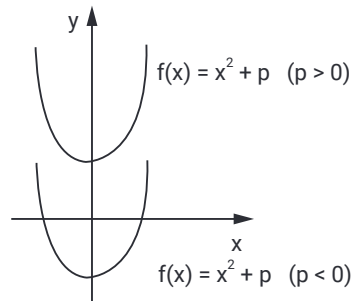
Para la alternativa D) determinemos el signo de la expresión $b^2 - 4ac$ (el discriminante), para ello ocupamos la expresión desarrollada: $-x^2 + 6x - 3$, tenemos que $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 36 - 12 = 24$, como el discriminante es positivo, la gráfica intersecta al eje x en dos puntos, luego es verdadera.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la gráfica de la función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 + p$, con $p \neq 0$?

- A) Su vértice está en el eje y.
- B) Si $p > 0$, no interseca al eje x.
- C) Si $p < 0$, el discriminante asociado a esta función es positivo.
- D) Podría ser tangente al eje x.

Solución:

Sabemos que el gráfico de $f(x) = x^2 + p$, corresponde a la gráfica de $g(x) = x^2$, desplazada "p" unidades hacia arriba o hacia abajo dependiendo si p es positivo o negativo respectivamente:



Observa que en ambos casos el vértice está en el eje y, por lo tanto A) es verdadera.

En el caso en que $p > 0$, se obtendría la parábola que está sobre el eje x (ver fig. anterior), por lo tanto no intersecaría al eje x, luego B) es verdadera.

Si $p < 0$, se obtendría la parábola cuyo vértice está bajo el eje x (ver fig.) luego intersecharía en 2 puntos al eje x, por lo tanto el discriminante es positivo, C) es verdadera.

Por último la alternativa D) es falsa, ya que la única forma de que la gráfica de la función $f(x) = x^2 + p$ sea tangente al eje x es que sea de la forma $f(x) = x^2$ y esto ocurre cuando $p = 0$, lo que es imposible, ya que se indica que $p \neq 0$.

4. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba, la función que modela la altura $h(t)$ que alcanza a los t segundos de ser lanzado es $h(t) = 40t - 5t^2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

- A) A los 3 segundos alcanza una altura de 75 m.
- B) A los 8 segundos el proyectil llega al suelo.
- C) La máxima altura la alcanza a los 4 s.
- D) La máxima altura es inferior a los 80 m.

Solución:

En A) calculamos $h(3)$, lo que nos da $h(3) = 40 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 120 - 45 = 75$ m, luego es verdadera.

En B) calculamos $h(8)$, obteniendo $h(8) = 40 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 0$ m, como la altura a los 8 s es cero, es verdadera.

Como la función dada es cuadrática, gráficamente la máxima altura se encuentra en el tiempo que corresponde al vértice, como la abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a}$, en este caso: $t = \frac{-40}{2 \cdot -5} = 4$, por lo que efectivamente la máxima altura ocurre a los 4 s de ser lanzado el proyectil, luego C) es verdadera.

Para hallar la altura máxima reemplazamos el tiempo hallado en C) en la función:

$h(4) = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 80$ m, luego la máxima altura es 80 m y no es inferior a 80 m, luego D) es falsa.