

Capítulo 1

PORCENTAJE



El uso del porcentaje como tal es muy antiguo, en la antigua Roma, el emperador Augustus, estableció un cobro de impuestos para las subastas llamada "centesima rerum venalium" la que comprendía a una parte de cien del precio subastado (lo que hoy entendemos como un 1 %).

El uso de fracciones centesimales facilitaban mucho los cálculos, por lo que habitualmente se calculaban impuestos con este tipo de fracciones, por ejemplo el impuesto por la compra de esclavos era de una parte por 25, como $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, se entendía fácilmente que el impuesto por adquirir un esclavo era de 4 partes por cada 100 (o bien un 4% en términos actuales).

El símbolo de porcentaje, se cree tiene sus orígenes en un manuscrito anónimo de 1425: $\text{P} \frac{\circ}{\circ}$

posteriormente este símbolo tuvo la siguiente variación:

P_{cento}
Símbolo siglo XV

P_{o}
Símbolo siglo XVII

$\%$
Símbolo a partir del siglo XVIII

CONCEPTOS CLAVES

- Porcentaje como fracción de una cantidad
- Variaciones porcentuales
- Porcentaje como factor decimal
- Comparación porcentual

✓ Porcentaje de una cantidad

Tal como se mencionó en la portada del capítulo, cuando nos referimos a un tanto por ciento de una cantidad, nos estamos refiriendo a una fracción de ella.

Si queremos calcular el $a\%$ de b , calculamos la fracción $\frac{a}{100}$ de esa cantidad.
Entonces

$$a\% \text{ de } b = \frac{a}{100} \cdot b$$

Ejemplo:

El 80% de 320 es $\frac{80}{100} \cdot 320 = 256$.

Ejemplo:

Si un artículo vale \$42.000 y se hace un descuento de un 12%, ¿cuál es su nuevo precio?

Solución:

Calculamos el 12% de \$42.000, esto es: $\frac{12}{100} \cdot 42000 = 5040$, luego el nuevo precio es $\$42.000 - \$5.040 = \$36.960$.

Observa que como el precio bajó un 12%, quedaría un $100 - 12 = 88\%$ del precio inicial, es decir podríamos calculado directamente un 88% de \$42.000, esto es: $\frac{88}{100} \cdot \$42.000 = \36.960 .

✓ Porcentajes especiales

Es importante considerar las siguientes equivalencias entre fracciones y porcentajes:

Fracción	Porcentaje
$\frac{1}{8}$	12,5 %
$\frac{1}{4}$	25 %
$\frac{1}{3}$	$33,\overline{3}$ %
$\frac{1}{2}$	50 %
$\frac{2}{3}$	$66,\overline{6}$ %
$\frac{3}{4}$	75%

✓ Porcentaje como factor decimal

Anteriormente vimos el cálculo porcentual como la fracción de una cantidad, pero si convertimos la fracción a su equivalente decimal, podemos calcular un porcentaje sencillamente multiplicando la cantidad por el decimal correspondiente al porcentaje que estamos calculando.

Ejemplo:

El precio de un kilo de carne en un supermercado vale \$6.800 y los días lunes el precio de la carne se rebaja un 8%, ¿cuánto será el precio de esta carne el día lunes en ese supermercado?

Solución:

Debemos calcular el 8 % de \$6.800, esto es $\frac{8}{100} \cdot 6800$, pero si la fracción centesimal $\frac{8}{100}$ la convertimos a su

equivalente decimal obtenemos 0,08 luego el 8% de \$6.800 se puede calcular como el producto $0,08 \cdot \$6.800$, lo que resulta \$544, luego el precio de la carne el lunes es de $\$6.800 - \$544 = \$6.256$.

Al igual que en el ejemplo anterior, podríamos haber calculado directamente el precio final, restando $100\% - 8\% = 92\%$, por lo que el precio final del kilo de la carne el lunes sería el 92% de \$6.800, es decir $0,92 \cdot \$6.800$, lo que nos da el mismo resultado \$ 6.256.

Ejemplo:

El precio del kg de tomates en un puesto en la feria es de \$600, pero el comerciante decide subirlo un 5%, ¿cuál es su nuevo precio?

Solución:

Si aplicamos el porcentaje como un factor decimal, tenemos que el 5% de \$600 es $0,05 \cdot \$600 = \30 , luego el nuevo precio es de $\$600 + \$30 = \$630$.

Es importante considerar que también se puede hacer el cálculo directamente, sin tener que hacer la suma final. Si el precio del tomate subió un 5% entonces el nuevo precio es un 105% del precio original ($100\% + 5\%$).

Si calculamos: 105% de \$600, tenemos $\frac{105}{100} \cdot \$600$, o bien $1,05 \cdot \$600$ lo que obviamente nos entrega el mismo valor de \$630.

Lo importante de este último cálculo es entender que el factor decimal 1,05 es equivalente a calcular el 105% de la cantidad o bien la cantidad aumentada en un 5%, detalle importante que utilizaremos cuando veamos interés compuesto.

✓ Comparación porcentual

Cuando tenemos dos cantidades las podemos comparar mediante una diferencia: "Juan tiene una masa de 2 kg más que su hermano", también podemos comparar por cociente o razón: "estas distancias están en la razón de 2 es a 3", o también las podemos comparar porcentualmente: "el porcentaje de alumnos presentes de un curso un cierto día fue un 80%".

Al querer calcular qué porcentaje es a de b , esto es una comparación porcentual entre a y b , una forma rápida es calcular:

$$\frac{a}{b} \cdot 100$$

Esto se puede explicar de varias formas, un ejemplo clásico es ocupar una proporción (o regla de 3), al decir "qué porcentaje es a de b ", se está comparando a con una totalidad que es b , es decir b es el 100%, por lo que planteamos:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{100}, \text{ al despejar "x", obtenemos que } x = \frac{a}{b} \cdot 100.$$

Ejemplo:

De un total de n tornillos fabricados hay m fallados, ¿qué % de los tornillos **no** están fallados?

Solución:

Acá estamos comparando la cantidad de tornillos no fallados que son $(n - m)$ con un total de n tornillos,

por lo que la respuesta es $\left(\frac{n - m}{n}\right) \cdot 100\%$.

✓ Variaciones porcentuales

Hemos visto que el porcentaje se puede expresar como un factor decimal, como el 83% de x es $0,83x$ y si a y lo aumentamos en un 12% quedaría un 112% de y o bien $1,12y$.

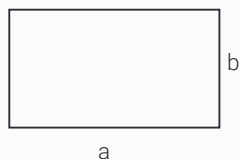
Este enfoque de los porcentajes nos permite calcular fácilmente cuánto varía porcentualmente una expresión.

Ejemplo:

En un rectángulo el largo aumenta en un 10% y el ancho disminuye en un 10%, ¿en qué % varía el área?

Solución:

Como el largo " a " aumenta un 10%, entonces queda en " $1,1a$ ", mientras que el ancho b disminuye un 10% queda en " $0,9b$ ", entonces el área inicial $A = ab$ es ahora $A' = (1,1a) \cdot (0,9b) = 0,99ab$, pero $0,99ab$ es el 99% de ab , luego el área disminuye en un 1%.



Tal como lo vimos en este ejemplo cuando tenemos una expresión con un factor decimal podemos interpretar fácilmente su variación porcentual. Por ejemplo $1,32z$ es un 132% de z o bien z aumentado en un 32%.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En un curso, hay 2 de los 30 estudiantes que no han pagado la cuota del paseo de fin de año, ¿qué % de los estudiantes no han pagado esta cuota?

Solución:

En este caso tenemos que comparar 2 con 30, es decir 30 es el 100% y queremos determinar cuánto es 2 de esta totalidad:

$$\frac{30}{100\%} = \frac{2}{x\%}, \text{ lo que nos da } x = 6,\overline{6}\%.$$

Para resolver el ejercicio podríamos haber calculado directamente lo que vimos en el apartado de comparación

porcentual, es decir ¿qué % es de 2 de 30?, la respuesta es $\left(\frac{2}{30}\right) \cdot 100 = 6,\overline{6}\%$.

2. El precio del arriendo de un departamento se ha subido en \$22.500 lo que corresponde al 5% del valor del arriendo. ¿Cuál es el canon de arriendo?

Solución:

Como sabemos que el 5% es \$22.500 podemos calcular el 100% a través de una proporción:

$$\frac{5\%}{100\%} = \frac{22.500}{x}, \text{ valor que da } x = \$450.000.$$

Lo anterior también se puede resolver planteando la siguiente ecuación: $\frac{5}{100}x = 22.500$, con lo que obtenemos obviamente el mismo valor, $x = \$450.000$.

3. Juan ha planificado un paseo al sur del país en tres días, en el primer día recorrió el 20% del trayecto, en el segundo día el 40% del resto y el tercer día recorrió 720 km, ¿cuánto recorrió el segundo día?

Solución:

Tenemos que el primer día recorrió un 20%, en el segundo día el 40% del resto, es decir un 40% del 80%, esto es

$$\frac{40}{100} \cdot 80\% = 32\%, \text{ si sumamos el 20\% con el 32\%, obtenemos un 52\%, por lo que queda por recorrer}$$

$$100\% - 52\% = 48\%, \text{ lo que corresponde a 720 km.}$$

De modo que tenemos que el 48% es 720 km y queremos determinar lo que recorrió el segundo día (32%), por lo que podemos plantear la proporción:

$$\frac{48\%}{720} = \frac{32\%}{x}, \text{ de donde } x = 480 \text{ km.}$$

Obviamente, también podríamos haber calculado la totalidad del trayecto (100%) y posteriormente haber calculado el 32%.

4. Si 40% de $(x + y)$ es igual al 60% de $(x - y)$, con $y \neq 0$, entonces $\frac{x-2y}{x+3y}$ es

Solución:

De la información dada tenemos que $\frac{40}{100}(x + y) = \frac{60}{100}(x - y)$, o equivalentemente:

$\frac{2}{5}(x + y) = \frac{3}{5}(x - y)$, multiplicando por 5 y desarrollando, tenemos: $2x + 2y = 3x - 3y \rightarrow x = 5y$

Reemplazando $x = 5y$ en $\frac{x-2y}{x+3y}$, obtenemos $\frac{3}{8}$.

5. En una población hay P sujetos contagiados, se estima que mensualmente los contagiados aumentan en un 5%, esto es considerando los fallecidos y recuperados. Determina la expresión que modele la cantidad de contagiados que habrá a los t años.

Solución:

Al primer mes tendremos que la población de contagiados será de 105% de P , esto es $1,05P$, al segundo mes los contagiados será el 105% del 105% de P esto es $1,05 \cdot (1,05P) = P \cdot (1,05)^2$ y así sucesivamente, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Mes	Contagiados
1	$P \cdot (1,05)$
2	$P \cdot (1,05)^2$
3	$P \cdot (1,05)^3$
12	$P \cdot (1,05)^{12}$

Entonces a los n meses la cantidad de contagiados es $P \cdot (1,05)^n$.

Como son t años, esto corresponde a $(12t)$ meses, luego la población de contagiados será de $P \cdot (1,05)^{12t}$ personas.