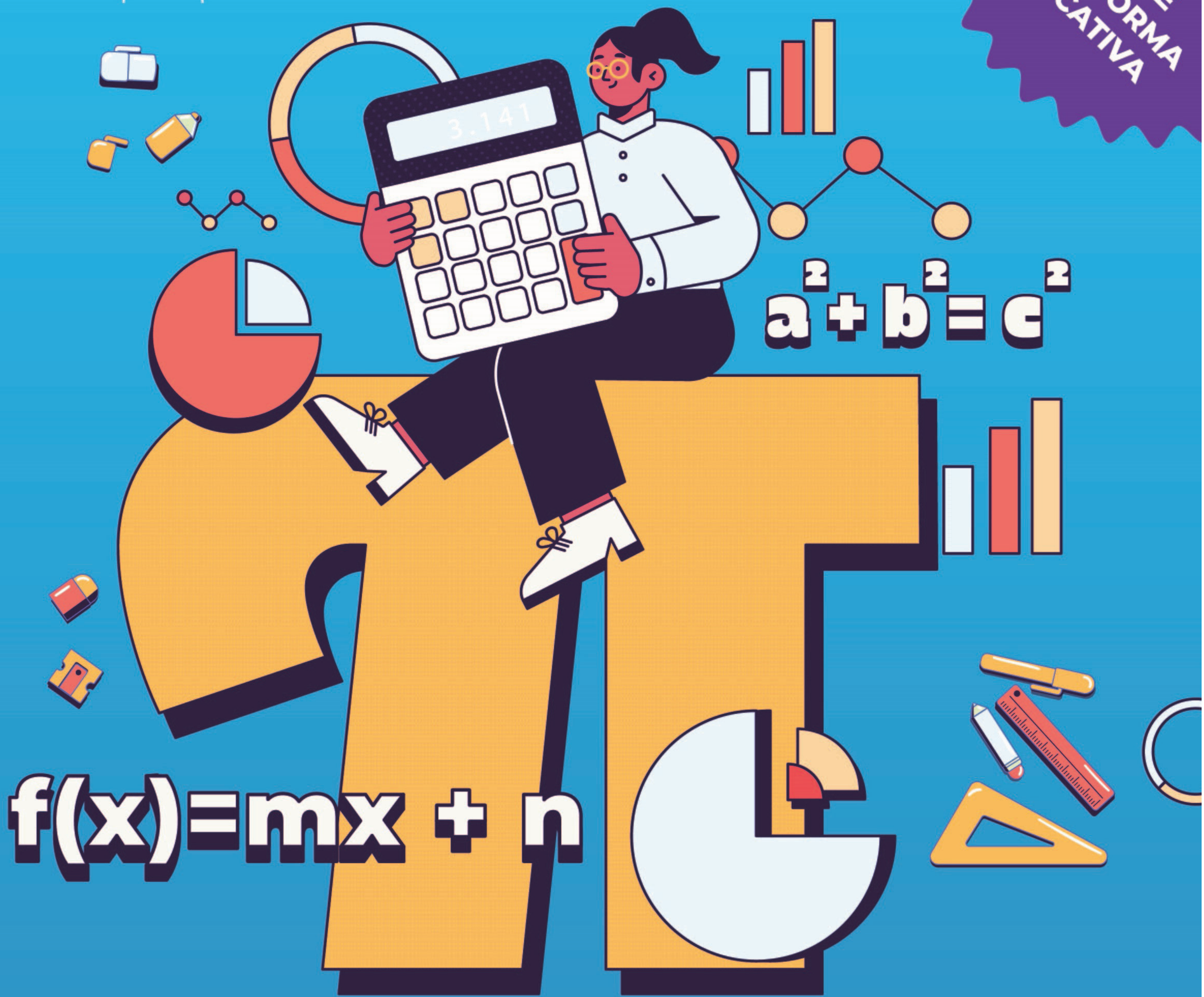
Editorial CID en colaboración con Plataforma Educativa BRINCUS.com

INCLUYE PLATAFORMA EDUCATIVA



Texto preparación PAES MATEmática

Prueba obligatoria

EDUARDO CID FIGUEROA

Editorial CID

TEXTO PREPARACIÓN

PRUEBA OBLIGATORIA

PAES

MATEMÁTICA

EDUARDO CID FIGUEROA

Eduardo Cid Figueroa

Profesor de Matemática, autor de textos de Enseñanza Media y preparación de pruebas de Admisión Universitaria

Editor: Eduardo Cid Figueroa
Diseño de obra : Luis Araos Silva

1ª Edición: agosto 2022
I.S.B.N: 978-956-7705-56-6
N° inscripción: 8138
Autor: Eduardo Cid Figueroa

Consultas, pedidos y sugerencias al correo electrónico: ventas@editorialcid.com
Visite nuestro sitio www.editorialcid.com

Editorial CID

INTRODUCCIÓN

Estimad@s alumn@s y colegas, en este texto de preparación PAES Matemática, hemos ajustado algunos ejercicios según lo expuesto por el DEMRE en estas últimas publicaciones, por lo cual hemos incorporado más ejercicios de aplicación, se han eliminado los ítemes de selección de información, los ítemes combinados (con I, II y III) y todos los ejercicios se han modificado a cuatro alternativas; los ejercicios que te presentamos te ayudarán en el desarrollo de las habilidades matemáticas: resolver problemas, argumentar, modelar y representar, aspecto que debes considerar ya que en esta nueva prueba de "Competencia Matemática PAES 1", la medición de estas habilidades estará presente en cada uno de los items.

Otro aspecto importante: el portal educativo www.21temas.cl , pasa a ser www.brincus.com/paes, en un esfuerzo conjunto con "Brincus", empresa especialista en educación digital (te aconsejo visitar www.brincus.com), se ha fortalecido enormemente la antigua plataforma, incorporando 4 miniensayos (uno por cada eje temático), ensayos para que te vayas evaluando permanentemente, con útiles estadísticas de tu avance, además permanecen de la antigua plataforma: la resolución de los ejercicios en video y las clases que han sido una herramienta importante para la preparación de la prueba de admisión universitaria de nuestr@s alumn@s de los textos anteriores: "21 temas para practicar y aprender matemática" y "Texto Preparación Prueba de Transición Matemática".

Tal como te lo he comentado en los textos anteriores, es importante que antes de realizar los ejercicios, debes tener una base teórica, para ello cuentas con los contenidos y los ejercicios resueltos presentes en el texto, los resúmenes de materia y los videos de clases, los que hallarás en el portal educativo; si realizas un ítem y presentas dificultad al resolverlo, no veas inmediatamente el video de resolución, es muy importante para tu preparación que hagas un esfuerzo para resolverlo por ti mismo, intenta uno, dos o tres veces, no desfallezcas, si no has podido resolverlo después de varios intentos, entonces accede a la resolución del video.

Para una buena preparación es importante una abundante ejercitación, pero será una preparación débil sino tienes unos buenos cimientos teóricos.

Agradezco a "Brincus" el gran esfuerzo en fortalecer enormemente nuestro portal, apoyándote con herramientas tecnológicas que te ayudarán sin duda en tú preparación.

Para consultas, solicitudes y observaciones por favor envial mail a ventas@editorialcid.com

Autor
Eduardo Cid Figueroa
Profesor de Matemática

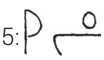
ÍNDICE

Capítulo
1

PORCENTAJE

El uso del porcentaje como tal es muy antiguo, en la antigua Roma, el emperador Augustus, estableció un cobro de impuestos para las subastas llamada “centesima rerum venalium” la que comprendía a una parte de cien del precio subastado (lo que hoy entendemos como un 1 %).

El uso de fracciones centesimales facilitaban mucho los cálculos, por lo que habitualmente se calculaban impuestos con este tipo de fracciones, por ejemplo el impuesto por la compra de esclavos era de una parte por 25 , como $\frac{1}{25}=\frac{4}{100}$, se entendía fácilmente que el impuesto por adquirir un esclavo era de 4 partes por cada 100 (o bien un 4% en términos actuales).

El símbolo de porcentaje, se cree tiene sus orígenes en un manuscrito anónimo de 1425: 

posteriormente este símbolo tuvo la siguiente variación: 

Símbolo siglo XV · Símbolo siglo XVII · Símbolo a partir del siglo XVIII

CONCEPTOS CLAVES

- **Porcentaje como fracción de una cantidad**
- **Variaciones porcentuales**
- **Porcentaje como factor decimal**
- **Comparación porcentual**

Porcentaje de una cantidad

Tal como se mencionó en la portada del capítulo, cuando nos referimos a un tanto por ciento de una cantidad, nos estamos refiriendo a una fracción de ella.

Si queremos calcular el a % de b , calculamos la fracción $\frac{a}{100}$ de esa cantidad.
Entonces

$$\boxed{a\ \%\ \text{de}\ b = \frac{a}{100} \cdot b}$$

Ejemplo:

El 80% de 320 es $\frac{80}{100} \cdot 320 = 256$.

Ejemplo:

Si un artículo vale $42.000 y se hace un descuento de un 12%, ¿cuál es su nuevo precio?

Solución:

Calculamos el 12% de \$42.000, esto es: $\frac{12}{100} \cdot 42000 = 5040$, luego el nuevo precio es \$42.000 - \$5.040 = \$36.960.
Observa que como el precio bajó un 12%, quedaría un 100 - 12 = 88% del precio inicial, es decir podríamos calculado directamente un 88% de \$42.000, esto es: $\frac{88}{100} \cdot \$42.000 = \$36.960$.

Porcentajes especiales

Es importante considerar las siguientes equivalencias entre fracciones y porcentajes:

Fracción	Porcentaje
$\frac{1}{8}$	12,5 %
$\frac{1}{4}$	25 %
$\frac{1}{3}$	$33,\overline{3}$ %
$\frac{1}{2}$	50 %
$\frac{2}{3}$	$66,\overline{6}$ %
$\frac{3}{4}$	75%

Porcentaje como factor decimal

Anteriormente vimos el calculo porcentual como la fracción de una cantidad, pero si convertimos la fracción a su equivalente decimal, podemos calcular un porcentaje sencillamente multiplicando la cantidad por el decimal correspondiente al porcentaje que estamos calculando.

Ejemplo:

El precio de un kilo de carne en un supermercado vale $6.800 y los días lunes el precio de la carne se rebaja un 8%, ¿cuánto será el precio de esta carne el día lunes en ese supermercado?

Solución:

Debemos calcular el 8 % de $6.800, esto es $\frac{8}{100} \cdot 6800$, pero si la fracción centesimal $\frac{8}{100}$ la convertimos a su equivalente decimal obtenemos 0,08 luego el 8% de $6.800 se puede calcular como el producto 0,08 · $6.800, lo que resulta $544, luego el precio de la carne el lunes es de $6.800 - $544 = $6.256.

Al igual que en el ejemplo anterior, podríamos haber calculado directamente el precio final, restando 100% - 8% = 92%, por lo que el precio final del kilo de la carne el lunes sería el 92% de $6.800, es decir 0,92 · $6.800, lo que nos da el mismo resultado $ 6.256.

Ejemplo:

El precio del kg de tomates en un puesto en la feria es de $600, pero el comerciante decide subirlo un 5%, ¿cuál es su nuevo precio?

Solución:

Si aplicamos el porcentaje como un factor decimal, tenemos que el 5% de $600 es 0,05 · $600 = $30, luego el nuevo precio es de $600 + $30 = $630.

Es importante considerar que también se puede hacer el cálculo directamente, sin tener que hacer la suma final. Si el precio del tomate subió un 5% entonces el nuevo precio es un 105% del precio original (100%+5%).

Si calculamos: 105% de $600, tenemos $\frac{105}{100} \cdot \$600$, o bien 1,05 · $600 lo que obviamente nos entrega el mismo valor de $630.

Lo importante de este último cálculo es entender que el factor decimal 1,05 es equivalente a calcular el 105% de la cantidad o bien la cantidad aumentada en un 5%, detalle importante que utilizaremos cuando veamos interes compuesto.

Comparación porcentual

Cuando tenemos dos cantidades las podemos comparar mediante una diferencia: “Juan tiene una mása de 2 kg más que su hermano”, también podemos comparar por cuociente o razón: “estas distancias están en la razón de 2 es a 3”, o también las podemos comparar porcentualmente: “el porcentaje de alumnos presentes de un curso un cierto día fue un 80%.

Al querer calcular qué porcentaje es a de b, esto es una comparación porcentual entre a y b, una forma rápida es calcular:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot 100}$$

Esto se puede explicar de varias formas, un ejemplo clásico es ocupar una proporción (o regla de 3), al decir “qué porcentaje es a de b”, se está comparando a con una totalidad que es b, es decir b es el 100%, por lo que planteamos:
$\frac{a}{b} = \frac{x}{100}$, al despejar “x”, obtenemos que $x = \frac{a}{b} \cdot 100$.

Ejemplo:
De un total de **n** tornillos fabricados hay **m** fallados, ¿qué % de los tornillos **no** están fallados?

Solución:
Acá estamos comparando la cantidad de tornillos no fallados que son (n – m) con un total de n tornillos,

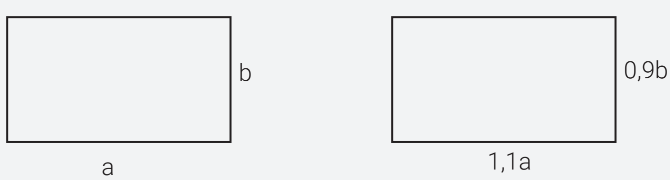
por lo que la respuesta es $\left(\frac{n-m}{n}\right) \cdot 100\%$.

Variaciones porcentuales

Hemos visto que el porcentaje se puede expresar como un factor decimal, como el 83% de x es 0,83 x y si a y lo aumentamos en un 12% quedaría un 112% de y o bien 1,12y.
Este enfoque de los porcentajes nos permite calcular facilmente cuánto varía porcentualmente una expresión.

Ejemplo:
En un rectángulo el largo aumenta en un 10% y el ancho disminuye en un 10%, ¿en qué % varía el área?

Solución:
Como el largo “a” aumenta un 10%, entonces queda en “1,1a”, mientras que el ancho b disminuye un 10% queda en “0,9b”, entoncas el área inicial A =ab es ahora A’ = (1, 1a) · (0,9b) = 0,99ab , pero 0,99ab es el 99% de ab, luego el área disminuye en un 1%.



Tal como lo vimos en este ejemplo cuando tenemos una expresión con un factor decimal podemos interpretar facilmente su variación porcentual. Por ejemplo 1,32z es un 132% de z o bien z aumentado en un 32%.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En un curso, hay 2 de los 30 estudiantes que no han pagado la cuota del paseo de fin de año, ¿qué % de los estudiantes no han pagado esta cuota?

Solución:
En este caso tenemos que comparar 2 con 30, es decir 30 es el 100% y queremos determinar cuánto es 2 de esta totalidad:

$\frac{30}{100\%} = \frac{2}{x\%}$, lo que nos da $x=6,\overline{6}$ %.

Para resolver el ejercicio podríamos haber calculado directamente lo que vimos en el apartado de comparación porcentual, es decir ¿qué % es de 2 de 30?, la respuesta es $\left(\frac{2}{30}\right) \cdot 100 = 6,\overline{6}\%$.

2. El precio del arriendo de un departamento se ha subido en \$22.500 lo que corresponde al 5% del valor del arriendo. ¿Cuál es el canon de arriendo?

Solución:
Como sabemos que el 5% es \$22.500 podemos calcular el 100% a través de una proporción:

$\frac{5\%}{100\%} = \frac{22.500}{x}$, valor que da x = \$450.000.

Lo anterior también se puede resolver planteando la siguiente ecuación: $\frac{5}{100}x = 22.500$, con lo que obtenemos obviamente el mismo valor, x = \$450.000.

3. Juan ha planificado un paseo al sur del país en tres días, en el primer día recorrió el 20% del trayecto, en el segundo día el 40% del resto y el tercer día recorrió 720 km, ¿cuánto recorrió el segundo día?

Solución:
Tenemos que el primer día recorrió un 20%, en el segundo día el 40% del resto, es decir un 40% del 80%, esto es

$\frac{40}{100} \cdot 80\% = 32\%$, si sumamos el 20% con el 32%, obtenemos un 52%, por lo que que queda por recorrer

100% - 52% = 48%, lo que corresponde a 720 km.

De modo que tenemos que el 48% es 720 km y queremos determinar lo que recorrió el segundo día (32%), por lo que podemos plantear la proporción:

$\frac{48\%}{720} = \frac{32\%}{x}$, de donde x = 480 km.

Obviamente, también podríamos haber calculado la totalidad del trayecto (100%) y posteriormente haber calculado el 32%.

4. Si 40% de (x + y) es igual al 60% de (x – y), con y ≠ 0, entonces $\frac{x-2y}{x+3y}$ es

Solución:

De la información dada tenemos que $\frac{40}{100}(x+y) = \frac{60}{100}(x-y)$, o equivalentemente:

$\frac{2}{5}(x+y) = \frac{3}{5}(x-y)$, multiplicando por 5 y desarrollando, tenemos: $2x + 2y = 3x - 3y \rightarrow x = 5y$

Reemplazando x = 5y en $\frac{x-2y}{x+3y}$, obtenemos $\frac{3}{8}$.

5. En una población hay P sujetos contagiados, se estima que mensualmente los contagiados aumentan en un 5%, esto es considerando los fallecidos y recuperados. Determina la expresión que modele la cantidad de contagiados que habrá a los t años.

Solución:

Al primer mes tendremos que la población de contagiados será de 105% de P, esto es 1,05P, al segundo mes los contagiados será el 105% del 105% de P esto es 1,05. (1,05P) = P . $(1,05)^2$ y así sucesivamente, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Mes	Contagiados
1	$P \cdot (1,05)$
2	$P \cdot (1,05)^2$
3	$P \cdot (1,05)^3$
12	$P \cdot (1,05)^{12}$

Entonces a los n meses la cantidad de contagiados es $P \cdot (1,05)^n$.
Como son t años, esto corresponde a (12t) meses, luego la población de contagiados será de $P \cdot (1,05)^{12t}$ personas.

ATENCIÓN
Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:
- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. El 30% de un número es 45, ¿cuál es su 12%?

A) 25
B) 18
C) 12
D) 8

2. El 15% de $1\frac{2}{3}$ es

A) 0,125
B) 0,25
C) 0,45
D) 0,09

3. El 50% de la mitad de un número es 20, entonces el número es

A) 10
B) 20
C) 40
D) 80

4. ¿Qué porcentaje es $0{,}4\overline{2}$ de $0{,}\overline{76}$?

A) 32,41%
B) 50%
C) 55%
D) 60,8%

5. **a** es el 10% de **b** y **b** es el 10% de **c**. Si **c** = 10, entonces **a** =

A) 0,01
B) 0,1
C) 1
D) 10

6. Una camisa con un 20% de descuento cuesta \$4.000, ¿cuánto costaría sin la rebaja?

A) \$4.800
B) \$5.000
C) \$5.200
D) \$5.400

7. En un curso hay una mujer cada 4 hombres, ¿qué % del curso son mujeres?

A) 20%
B) 25%
C) 30%
D) 40%

8. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es equivalente con el 12% de 50?

A) 20% de 30
B) $0{,}12 \cdot 50$
C) 0,05% de 1.200
D) $0{,}15 \cdot 40$

9. Se ha cancelado \$42.000, que corresponde al 60% de una deuda, ¿cuánto falta por pagar?

A) \$14.000
B) \$28.000
C) \$30.000
D) \$70.000

10. Si 12 es el 40% de un número, ¿cuál es el número?

A) 18

B) 30

C) 40

D) 48

11. El 20% del área de un cuadrado es 20 cm^2, ¿cuál es su perímetro?

A) 100 cm

B) 40 cm

C) 25 cm

D) 10 cm

12. ¿Cuál de las siguientes alternativas equivale al 40% de 2xy?

A) $\frac{4}{5}xy$

B) $\frac{4}{25}xy$

C) $\frac{16}{5}xy$

D) $\frac{3}{4}xy$

13. ¿Qué % es $\frac{6}{25}$ de $\frac{3}{5}$?

A) 14,4%

B) 25%

C) 40%

D) 60%

14. De un libro de 120 páginas, he leído 96, ¿qué % me queda por leer?

A) 5%

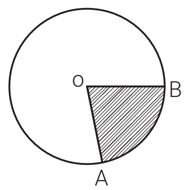
B) 20%

C) 40%

D) 80%

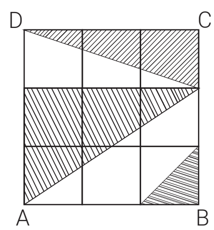
15. ¿Qué % de la superficie del círculo de centro 0, está sombreada, si $\sphericalangle A0B = 72°$?

A) 0,2%
B) 5%
C) 20%
D) 40%



16. La figura está formada por 9 cuadrados congruentes.
¿Aproximadamente, que % del cuadrado ABCD está sombreado?

A) 50%
B) 56%
C) 60%
D) 65%



17. El 20% de (x + y) equivale a los $\frac{4}{5}$ de (x – y), entonces $\frac{x}{y} =$

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{5}{3}$

18. Un hotel con capacidad para 800 pasajeros está completo; si un día se va un 30% de los pasajeros y llega un 15% de la capacidad. ¿Cuántos pasajeros faltan para que el hotel esté nuevamente completo?

A) 680
B) 560
C) 240
D) 120

19. Una emisora transmite 16 horas al día. Si su programación consiste en un 65% de música popular, 25% de música folclórica y el resto corresponde a música selecta, entonces, ¿cuántas horas dedica la emisora a música selecta?

A) 1h 6 min
B) 1h 10 min
C) 1h 36 min
D) 2 horas

20. El 30% de a equivale al 20% de b, ¿qué parte es a de b?

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{3}{2}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{5}$

21. El pago mínimo de una tarjeta de crédito es el 5% de la deuda. Si en un estado de cuenta figura como pago mínimo $12.000, ¿cuál es el total de la deuda?

A) $228.000
B) $240.000
C) $252.000
D) $300.000

22. El precio de una radio ha sido rebajado en $1.200, lo que corresponde al 5% de su valor. ¿Cuánto costará durante la oferta?

A) $21.500
B) $22.800
C) $23.800
D) $24.000

23. 10^3 es el 10% de:

A) 10
B) 10^2
C) 10^3
D) 10^4

24. Un poste tiene enterrado el 20% de su longitud total. Si la parte no enterrada mide 12 m, ¿cuál es la longitud total del poste?

A) 9,6 m
B) 27 m
C) 18 m
D) 15 m

25. El 25% de la edad del padre es la del hijo, y el 30% de la edad del hijo es 3, ¿qué edad tiene el padre?

A) 30
B) 40
C) 50
D) 60

26. Si **a** sumado con el 30% de 6 da el 40% de 8, entonces el 10% de **a** es

A) 0,05
B) 0,5
C) 0,14
D) 1,4

27. Solo 12 alumnas de un curso de 30, han pagado una cuota para un paseo.
¿Qué % del curso falta por pagar?

A) 40%
B) 45%
C) 55%
D) 60%

28. El 12% del 5% de 10.000 es

A) 0,6
B) 6
C) 60
D) 600

29. El 10% de la quinta parte de (x + y) es uno. Si x = 35 entonces y =

A) -15
B) 10
C) 15
D) 50

30. **A** equivale al 40% de **B** y **B** equivale al 30% de **C**. Si **C** = 100, entonces **A** + **B** =

A) 12
B) 30
C) 42
D) 150

31. Después de efectuar un 18% de descuento de su sueldo, una persona recibe $328.000.
¿Cuánto habría recibido sin el descuento?

A) $72.000
B) $387.040
C) $400.000
D) Más de $400.000.

32. En un cierto día, el % de asistencia de un curso fue de un 70%, si los asistentes eran 28.
¿Cuántos alumnos en total tiene el curso?

A) 12
B) 36
C) 38
D) 40

33. En una hacienda, el 20% de la tierra se destina a una plantación de árboles forestales, y un 25% del terreno restante para papas y el resto que corresponde a 66 hectáreas, se destina al cultivo de cereales.
¿Cuántas hectáreas tiene el terreno?

A) 29,7
B) 110
C) 120
D) 165

34. Un tour de 3 días, se desarrolla de modo que en el primer día se realiza la mitad del viaje, en el segundo día un 30%, quedando para el último día 100 kilómetros, ¿cuántos kilómetros en total tiene el tour?

A) 300
B) 350
C) 400
D) 500

35. Después de retirar el 10% de lo que tenía ahorrado en una cuenta, me quedó un saldo de $13.500, ¿cuánto tenía al principio?

A) $13.635
B) $14.000
C) $14.850
D) $15.000

36. Al sumar **A** con su 20% resulta 30, entonces **A**=

A) 20
B) 25
C) 30
D) 75

37. Para un estudio de precios, se ha considerado el precio de un producto en 4 supermercados distintos:

Supermercado A

Supermercado B

Supermercado C

Supermercado D

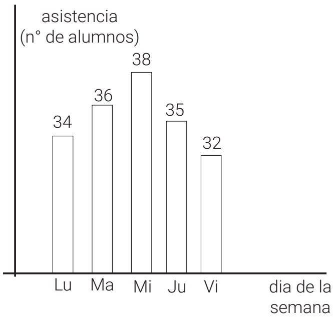
¿Cuál de estos supermercados es el más conveniente?

A) El supermercado A.
B) El supermercado B.
C) El supermercado C.
D) El supermercado D.

38. Un curso tiene 40 alumnos y en el siguiente gráfico de barras se ilustra la asistencia en una cierta semana:

¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

A) La menor inasistencia en la semana fue de un 5%.
B) La menor asistencia diaria fue de un 80%.
C) El miércoles la inasistencia fue de un 95%.
D) El jueves la inasistencia fue de un 12,5%



39. Si el 40% de un número es **p**, entonces ¿cuál de las siguientes opciones **NO** es equivalente al 60% de este número?

A) $\frac{3}{2}p$

B) p aumentado en el 50%.

C) 150% de p.

D) $p + \frac{1}{2}$

40. Un artículo tiene un costo de \$A y se vende en \$B (B > A), ¿cuál es el porcentaje de ganancia?

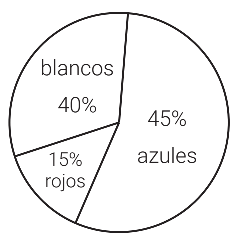
A) $\left(\frac{A - B}{A}\right) \cdot 100\%$

B) $\left(\frac{B - A}{A}\right) \cdot 100\%$

C) $\left(\frac{B - A}{B}\right) \cdot 100\%$

D) $\left(\frac{B - A}{A + B}\right) \cdot 100\%$

41. Durante el primer semestre, en una automotora, las ventas de un cierto modelo según su color, se muestran en el siguiente gráfico circular. Si la cantidad de vehículos azules vendidos fue 54, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?



A) La cantidad de vehículos blancos vendidos fue de 48 unidades.
B) La diferencia entre azules y blancos fue de 6 unidades.
C) El total de vehículos vendidos durante ese semestre fueron 120.
D) Entre rojos y azules se vendieron 60 unidades.

42. Por efectos de la evaporación, la altura del agua de un estanque disminuye en un 5% por día. Si a los 30 días la altura era de 120 metros, entonces la altura inicial era de

A) $120 \cdot (0{,}95)^{30}$

B) $120 \cdot (0{,}95)^{-30}$

C) $120 \cdot (1{,}05)^{30}$

D) $120 \cdot (1{,}05 \cdot 30)$

43. En una empresa, al sueldo bruto se le descuenta un 12% para AFP, un 7% para Fonasa o isapre y un 0,6% para el seguro de cesantía, obteniendo el sueldo líquido.
Si el sueldo líquido es B, entonces para obtener el sueldo bruto se debe

A) multiplicar B por 0,804.
B) dividir B por 0,804.
C) calcular el 19,6% de B y sumárselo.
D) multiplicar B por 1,804.

44. En una caja hay n bolitas, A son de color verde, B son rojas y las restantes son C azules.
Si A > B > C, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El % de bolitas verdes de la caja es $\left(\frac{A}{n} \cdot 100\right)$%.
B) El % de bolitas que no son rojas de la caja es $\left(\frac{n-B}{n}\right) \cdot 100\%$.
C) El % en que las verdes exceden a las rojas es $\left(\frac{A-B}{n}\right) \cdot 100\%$.
D) El % en que las rojas exceden a las azules es $\left(\frac{B-C}{B+C}\right) \cdot 100\%$.

45. Un automóvil vale \$A y se vende con un B% de ganancia, ¿cuál es su precio de venta?

A) $\$\ \frac{B}{100}$
B) $\$\ \frac{AB}{100}$
C) $\$\left(A + \frac{AB}{100}\right)$
D) $\$\left(A + \frac{B}{100}\right)$

46. Un artículo tiene un A% de descuento, con lo que su nuevo precio es $ C, ¿cuál era su precio original?

A) $C + \frac{A}{100}$

B) $C + \frac{A}{100} \cdot C$

C) $\frac{100C}{A + 100}$

D) $\frac{100C}{100 - A}$

47. En la siguiente tabla, se muestra la distribución de ausentes/presentes por sexo en un día de clases, siendo n el total de alumnos:

	Presentes	Ausentes
Hombres	a	c
Mujeres	b	d

¿Cuál de las siguientes afirnaciones es **FALSA**?

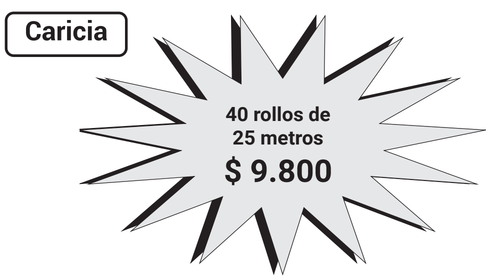
A) El porcentaje de presentes ese día fue $\left(\frac{a+b}{n}\right) \cdot 100\%$.

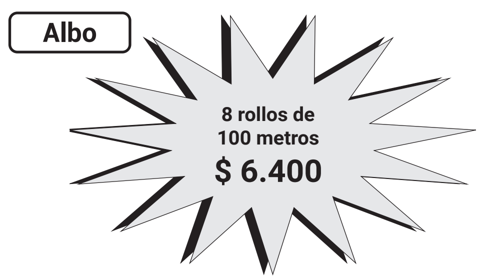
B) El porcentaje de mujeres del curso es $\left(\frac{b+d}{n}\right) \cdot 100\%$.

C) De las mujeres, el porcentaje que asistió ese día fue $\left(\frac{b}{n}\right) \cdot 100\%$.

D) Del curso, el porcentaje de los hombres ausentes ese día fue $\left(\frac{c}{n}\right) \cdot 100\%$.

48. Helena está comprando papel higiénico en el supermercado y está entre estas dos opciones:





Según lo anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si comparamos por metro de papel, Caricia resulta $1,8 más caro que el papel higiénico Albo.

B) Si comparamos por metro de papel, el papel higiénico Albo resulta menos de un 20% más económico que el otro.

C) El rollo del papel higiénico Albo cuesta $555 más que el otro.

D) El rollo del papel Caricia cuesta menos del 30% del valor del rollo del papel Albo

49. En una caja hay solo lápices azules y rojos, los cuales pueden ser de punta fina o punta gruesa. Se sabe que el 80% son azules, y de estos el 30% es de punta gruesa mientras que de los rojos el 60% es punta fina. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El 12% son rojos y de punta fina.
B) Los de punta gruesa son más de un 30%.
C) El número de lápices azules de punta gruesa son el triple del número de lápices rojos de punta gruesa.
D) Los rojos de punta fina son menos de un 12% del total de lápices.

50. Un número se disminuye en 15 y a este resultado le calculamos su 40% esto equivale al 25% del número, entonces ¿cuál de estas afirmaciones es **FALSA**?

A) El número es superior a 30.
B) El 12% del número es inferior a 5.
C) El 80% del número es inferior a 30.
D) El 12,5% del número es 5.

51. El precio de un refrigerador en una tienda es \$A, pero si se da un pie \$100.000, el saldo a pagar tiene un descuento de un 5% si se cancela en 5 cuotas, ¿cuál es el valor de cada cuota?

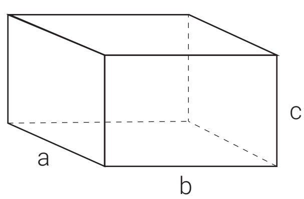
A) \$ 0,85(A – 100.000)
B) \$ 0,95(A – 100.000)
C) \$ 0,19(A – 100.000)
D) \$ 0,01(A – 100.000)

52. En un rectángulo, el largo aumenta un 30% y el ancho disminuye un 30%, entonces su área

A) queda igual.
B) disminuye en un 9%.
C) sube en un 10%.
D) disminuye en un 10%.

53. En el paralelepípedo recto de la figura, las aristas basales a y b aumentan un 10% y la altura c disminuye un 20%, ¿qué sucede con su volumen?

A) Disminuye un 3,2%
B) Disminuye un 2,2%
C) Aumenta un 4,2%
D) Permanece igual.



1

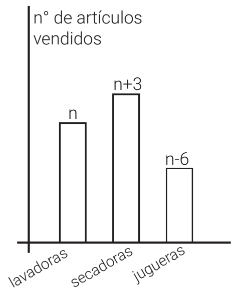
54. Sean f, a y b son tres variables que se relacionan de modo que $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Si a y b disminuyen en un 20%, entonces f

A) aumenta en un 20%.
B) aumenta en un 25%.
C) disminuye un 20%.
D) disminuye un 40%.

55. El volumen de un cilindro es $\pi r^2 h$ donde r es la longitud del radio basal y h es su altura. Si el radio aumenta en un 10% y su altura disminuye en un 10%, entonces su volumen

A) aumentó en un 10%.
B) aumentó en menos de un 1%.
C) aumentó en un 8,9%.
D) queda igual.

56. En el gráfico de barras se muestra la cantidad de artículos vendidos en un cierto día en una tienda, entre lavadoras, secadoras y jugueras. Si las secadoras representan el 40% del total de las ventas entre estos tres artículos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) Entre estos tres artículos, las jugueras corresponden al 25% de las ventas.
B) Entre estos tres artículos, las lavadoras corresponden al 35% de las ventas.
C) Entre estos tres artículos se vendieron 21 unidades.
D) Las secadoras vendidas fueron 24.

57. En un rectángulo, el largo aumenta en un 10% y el ancho disminuye en un 20%, obteniéndose un rectángulo de área 22 cm^2, ¿cuál era el área del rectángulo original?

A) 25 cm^2
B) 24,2 cm^2
C) 23,4 cm^2
D) 23,2 cm^2

58. Las variables P, A, B y C son tales que $P = \frac{AB}{C}$. Si A y B aumentan en un 20% y C disminuye en un 10%, entonces P

A) aumenta en un 50%.
B) disminuye en un 30%.
C) aumenta en un 60%.
D) aumenta en un 40%

59. La población P de habitantes de un pueblo ha crecido un 2% anual durante dos años seguidos y en el tercer año creció un 3%, entonces su población a fines del tercer año es de

A) $P \cdot 1{,}07$
B) $P \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}03$
C) $P \cdot (0{,}02)^2 \cdot 0{,}03$
D) $P \cdot (1{,}02)^2 \cdot 1{,}03$

60. En una reserva forestal, la cantidad de hectáreas de árboles disminuye a una tasa de un 20% anual. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite determinar la cantidad de años t que deben transcurrir para que la cantidad de hectáreas iniciales C se haya reducido a un 1%?

A) $C \cdot (0{,}8)^t = 0{,}01\ C$
B) $C \cdot (0{,}8)^t = 0{,}99\ C$
C) $C \cdot (0{,}2)^t = 0{,}99\ C$
D) $C \cdot (1{,}2)^t = 0{,}99\ C$

Capítulo
2

NÚMEROS RACIONALES

Los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, mientras que los egipcios usaron, sobre todo, las fracciones con numerador igual a 1.

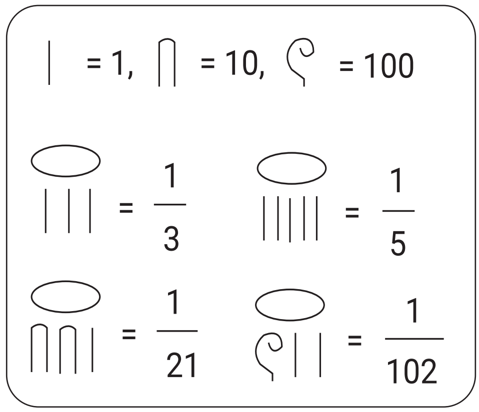
Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, es decir racionales con numerador 1, el uso de estas fracciones persisitió hasta la época medieval.

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, (ver portada cap. 8) introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones, tal como las conocemos hoy.

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los cocnocemos hoy.

A finales del siglo XVI, Simon Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales, pero los escribía de una forma no tan simple; así para 345,932 escribía 345 (0) 9(1) 3(2) 2(3).

Finalmente, los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII.



CONCEPTOS CLAVES

- **Conversión de decimal a fracción**
- **Propiedad de clausura**
- **Orden en los racionales**

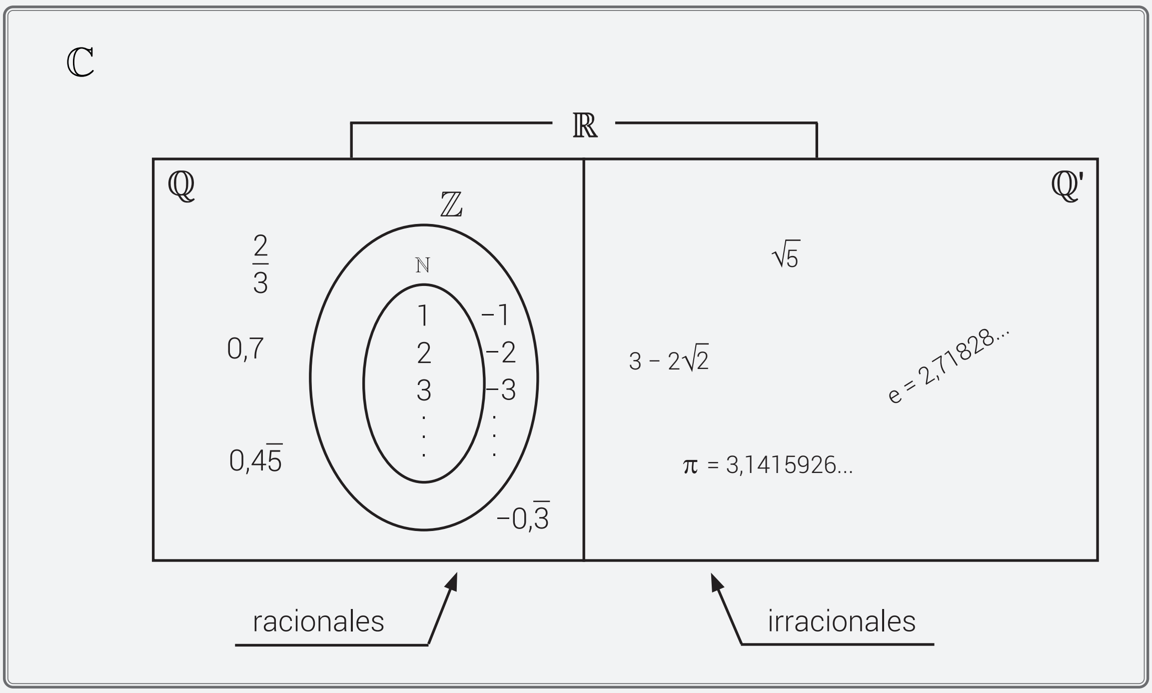
2

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos más importantes son los siguientes:

CONJUNTO NUMÉRICO	DESCRIPCIÓN
Números naturales	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
Números enteros	$\mathbb{Z} = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$
Números racionales	Son aquellos números que se pueden expresar como fraccón, como los números decimales finitos, periódicos, semiperiódicos y enteros $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ / \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$
Números irracionales	Son aquellos números que no se pueden expresar como fracción, como $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 1$, π, etc., se caracterizan por tener infinitas cifras decimales sin período, este conjunto numérico se designa con la letra $\mathbb{Q}'$ o $\mathbb{I}$.
Números reales	Se designa con la letra $\mathbb{R}$ y es la unión entre los racionales e irracionales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
Números complejos	Son de la forma a+bi donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, si b=0 se obtiene un número real, por lo tanto los complejos incluyen a los números reales $\mathbb{C} = \{z = a + bi \ / \ a \text{ y } b \in \mathbb{R}\}$

Resumiendo, tenemos el siguiente esquema:



Observación:

No son números reales las raíces de índice par de negativos, como $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-16}$, etc., ni tampoco cuando se divide por cero.

2

CONVERSIÓN DE DECIMAL A FRACCIÓN

En los racionales los decimales pueden ser finitos, infinitos periódicos o infinitos semiperiódicos, a continuación veremos cómo se pueden convertir a fracción:

- **Decimal finito**

Se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin considerar la coma y en el denominador colocamos un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Ejemplo: $0{,}32 = \frac{32}{100}$; $1{,}283 = \frac{1283}{1000}$.

- **Decimal infinito periódico**

Si no tiene entero, se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin la coma y en el denominador colocamos tantos nueves como cifras periódicas tenga.

En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el número entero y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga.

Ejemplo: $0{,}\overline{78} = \frac{78}{99}$; $1{,}\overline{45} = \frac{145-1}{99} = \frac{144}{99} = \frac{16}{11}$.

- **Decimal infinito semiperiódico**

Si no tiene entero, se escribe en el numerador la resta entre el número que forman sus cifras (sin la coma) con el anteperíodo y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga el número, seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el número que forman las cifras que no tienen período y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

Ejemplo: $0{,}3\overline{5} = \frac{35-3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$; $4{,}2\overline{8} = \frac{428-42}{90} = \frac{386}{90} = \frac{193}{45}$.

PROPIEDAD DE CLAUSURA

La propiedad de clausura en los números racionales, se refiere a que si operamos dos números racionales el resultado también es racional.

Observa que las cuatro operaciones básicas en los racionales tienen propiedad de clausura:

- Si sumamos dos racionales el resultado es racional.
- Si restamos dos racionales el resultado es racional.
- Si multiplicamos dos racionales el resultado es racional.
- Si dividimos dos racionales el resultado es racional, excepto la división por cero.

ORDEN EN LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales tienen el principio de tricotomía, es decir si tenemos dos números racionales, por ejemplo a y b, entonces se cumple alguna de estas posibilidades: (a > b) o (a = b) o (a < b).
Esto se traduce que si tenemos un conjunto de números racionales, siempre podemos ordenarlos, para ello existen diversas técnicas, algunas de ellas las veremos a continuación.
Si queremos comparar dos fracciones podemos multiplicar cruzado para compararlas:
$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow ad < bc$ (siempre que b, d > 0)en el caso en que sean más de dos fracciones podemos proceder como se ilustran en los primeros dos ejemplos.

Ejemplo 1: Ordenar de menor a mayor las fracciones $\frac{9}{20}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$

Para poder compararlas podemos intentar igualar denominadores, para ello calculamos el m.c.m. entre ellos y amplificamos las fracciones para que todas queden con igual denominador.
En este caso, el m.c.m. entre 8, 5 y 20 es 40, por lo tanto amplificamos para que todas las fracciones queden con denominador 40:

$$\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{18}{40}; \ \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{16}{40} \text{ y } \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$$

Como $\frac{15}{40} < \frac{16}{40} < \frac{18}{40}$, se obtiene que $\frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{9}{20}$.

En el caso en que fuese complicado igualar denominadores, se puede intentar igualar numeradores, o bien convertir las fracciones a decimal.

Ejemplo 2: Ordenar los números: $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}$, y $0,4\overline{2}$

Si convertimos a fracción el decimal $0,4\overline{2}$, obtenemos $0,4\overline{2} = \frac{42-4}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$. En este caso el tratar de igualar numeradores o denominadores entre las fracciones: $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}$ y $\frac{19}{45}$ es tedioso, por lo tanto lo más aconsejable es convertir a número decimal.

$\frac{5}{12} \leftrightarrow 5 : 12 = 0,41666...$, $\frac{3}{8} \leftrightarrow 3 : 8 = 0,375$ y $\frac{19}{45}$ sabíamos que era $0,4\overline{2}$.

Como $0,375 < 0,41666... < 0,4\overline{2}$, tenemos que $\frac{3}{8} < \frac{5}{12} < 0,4\overline{2}$.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se denomina notación científica de un número decimal cuando lo expresamos de la forma $a \cdot 10^n$, donde $1 \leq |a| < 10$ y n es un número entero. Según lo anterior, tenemos que $3,2 \cdot 10^5$ es un número escrito en notación científica, mientras que $34 \cdot 10^{-8}$ no lo está debido a que 34 > 10.
La notación científica es útil para operar con números que tienen muchas cifras cero, por ejemplo si queremos dividir 0,000034 con 170.000, primero llevamos estos números a notación científica:

$$\frac{0,000034}{170.000} = \frac{3,4 \cdot 10^{-5}}{1,7 \cdot 10^{5}} = 2 \cdot 10^{-5-5} = 2 \cdot 10^{-10}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Qué porcentaje es $1,28 \cdot 10^{-6}$ de $32 \cdot 10^{-7}$?

A) 20 %
B) 30 %
C) 40 %
D) 60 %

Solución:

Aunque esta pregunta es de porcentaje, la incluiremos acá debido que para resolverla se requiere la operatoria con números expresados en notación científica.

Según lo visto en el capítulo anterior, si queremos calcular qué porcentaje es A de B, efectuamos el cálculo:

$\frac{A^6}{B} \cdot 100$, en este caso sería $\frac{1,28 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-7}} .100$, la expresión $1,28 \cdot 10^{-6}$ la transformaremos a $128 \cdot 10^{-8}$ para así poder operar con el denominador, entonces tenemos: $\frac{1,28 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-7}} .100 = \frac{\cancel{128} \cdot 10^{-8}}{\cancel{32} \cdot 10^{-7}} .100 = 4 \cdot 10^{-8-(-7)} \cdot 10^2 = 40$, luego la respuesta es la alternativa C).

2. Pedro, Juan y Diego son tres administrativos que trabajan diariamente la misma cantidad de horas. A cada uno de ellos se les encarga la misma labor, para realizarla Pedro demoró $\frac{4}{9}$ de su jornada, mientras que Juan y Diego demoraron respectivamente $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$ de su jornada, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** ?

A) Pedro es el que se demorá más.
B) Diego demoró más que Juan.
C) Pedro demoró más que Juan.
D) Diego demoró más que Pedro.

Solución:

Una forma de poder comparar estas fracciones es convertirlas a número decimal, haciendo el cuociente entre el numerador y el denominador:

Observa que $\frac{4}{9}$ por tener un denominador 9, nos queda un decimal periódico: $\frac{4}{9} = 0,444...$

La fracción $\frac{2}{5}$ la podemos amplificar por 2 para obtener un denominador 10: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$.

En $\frac{3}{7}$, como no podemos amplificarla para obtener un denominador con nueves, nueves y ceros o potencias de 10, tendremos que efectuar el cuociente entre 4 y 7 lo que nos da 0,428..., entonces $\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9}$, es decir Pedro demoró más que Diego y Diego demoró más que Juan, luego la alternativa que tiene una afirmación falsa es D).

Otras formas de resolver este ejercicio:

-Igualar denominadores: lo que en este caso no es conveniente, ya que tendrías que calcular el mcm entre 5, 7 y 9.

-Igualar numeradores: esto es más conveniente que lo anterior ya que el mcm entre 4, 2 y 3 es 12, se amplifican las fracciones para llevarlas al mismo numerador, después ocupamos que entre mayor denominador menor es la fracción.

-Comparar de 2 en 2 las fracciones, utilizando que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, si $ad > bc$ (esto es válido cuando las fracciones son positivas).

3. Juan tiene \$50.000 en billetes de \$10.000 y \$5.000. si tiene A billetes de \$10.000, entonces ¿cuántos billetes de \$5.000 tiene?

A) 10 – A
B) 10 – 2A
C) 20 – A
D) 20 – 2A

Solución:
Supongamos que tiene x billetes de \$5.000, entonces el dinero que tiene es 10000A + 5000x que es igual a 50.000, resolvemos la ecuación 10000A + 5000x = 50000 y obtenemos que x = 10 – 2A, por lo tanto tenía (10 – 2A) billetes de \$5.000, luego la alternativa correcta es B).

4. Alberto gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo en supermercado, $\frac{2}{5}$ del resto en locomoción, la mitad de lo que le queda en arriendo, quedándole \$150.000, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Su sueldo es de \$750.000
B) Gasta \$250.000 en el supermercado.
C) Gasta en \$200.000 en locomoción.
D) Entre arriendo y locomoción gastó más de la mitad de su sueldo.

Solución:

Como gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo en el supermercado, el resto corresponde a los $\frac{2}{3}$, por lo tanto $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3}$ lo gasta en locomoción, pero $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$, es decir $\frac{4}{15}$ de su sueldo lo gasta en locomoción.

Sumamos $\frac{1}{3}$ con $\frac{4}{15}$, esto nos da $\frac{3}{5}$, por lo tanto la mitad del resto es $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$, o sea $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ lo gasta en arriendo.

Tenemos entonces que: $\frac{1}{3}$ lo gasta en el supermercado, $\frac{4}{15}$ en locomoción, $\frac{1}{5}$ en arriendo, si sumamos:

$\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, entonces lo que queda es $\frac{1}{5}$.

Si x es el total de su sueldo, entonces $\frac{1}{5}$x = 150.000, de lo que deduce que el sueldo es \$750.000 , por lo tanto A) es verdadera..

En supermercado gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo, esto es $\frac{1}{3} \cdot 750.000 = 250.000$, luego B) es verdadera.

En locomoción gasta $\frac{4}{15}$ de su sueldo, $\frac{4}{15} \cdot 750.000 = 200.000$, luego C) es verdadera.

Entre arriendo y locomoción gastó \$350.000 lo que es menos de la mitad de su sueldo, luego D) es falsa.

5. Sean a y b enteros mayores que 1, con a > b, entonces al ordenar las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b-1}$, $\frac{a+1}{b-1}$, de menor a mayor resulta

A) $\frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1} < \frac{a}{b} < \frac{b}{a}$

B) $\frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1} < \frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

C) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$

D) $\frac{a}{b} < \frac{b}{a} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$

Solución:

Como $a > b > 1$, tenemos que $\frac{a}{b} > 1$ y $\frac{b}{a} < 1$, por lo tanto $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$ ahora si comparamos $\frac{a}{b}$ con $\frac{a}{b-1}$,

tenemos que $\frac{a}{b-1} > \frac{a}{b}$, ya que $\frac{a}{b-1}$ tiene un denominador menor y los numeradores son iguales.

Por otro lado $\frac{a+1}{b-1} > \frac{a}{b-1}$, ya que el numerador es mayor y los denominadores son iguales.

Entonces $\frac{b}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$, respuesta C).

ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:

- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro
portal educativo

1. $(-3)^2 - (-2)^2 - (-1)^2 =$

A) -14
B) 4
C) 12
D) 14

2. $$\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}{2 + \frac{2}{5}} =$$

A) $\frac{1}{18}$
B) $\frac{16}{25}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{9}$

3. El profesor de Federico le da como tarea realizar el siguiente ejercicio de operación combinada entre números enteros, los pasos que sigue Federico son los siguientes:

$(-2) + (-3) + (-2) \cdot ((-3) + (-4))$

Paso 1

$= (-5) + (-2) \cdot ((-3) + (-4))$

Paso 2

$= (-7) \cdot ((-3 + (-4))$

Paso 3

$= (-7) \cdot (-3) + (-7) \cdot (-4)$

Paso 4

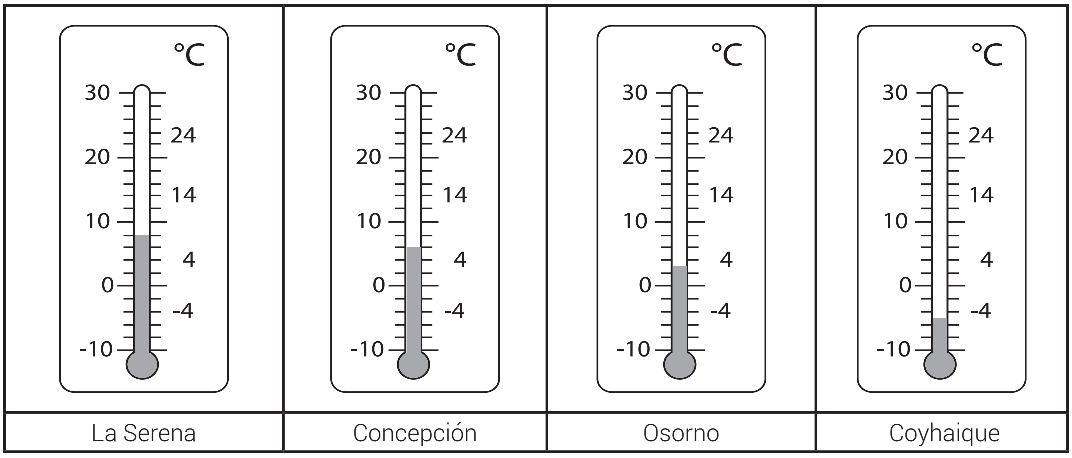
$= 21 + 28 = 49$

Al hacer el cálculo, ¿en cuál de los pasos cometió un error?

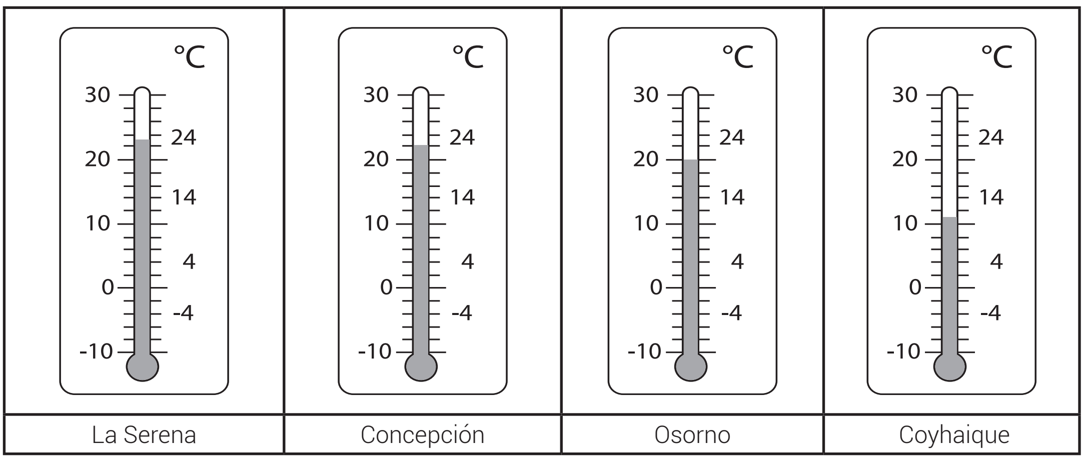
A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

4. En los siguientes termómetros se muestran las temperaturas mínimas y máximas alcanzadas en cuatro ciudades de nuestro país en un día determinado:

TEMPERATURAS MÍNIMAS:



TEMPERATURAS MÁXIMAS:



De la información dada anteriormente, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La mayor variación de temperatura se produjo en Osorno.
B) Concepción y Coyhaique presentaron la misma variación de temperatura.
C) La menor variación de temperatura se presentó en Coyhaique.
D) La suma de las variaciones de La Serena y Osorno es igual a las suma de las variaciones de las otras dos ciudades.

5. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$

A) -6
B) 4
C) 6
D) 8

6. $(0,\overline{2} + 1,0\overline{5})^{-1} =$

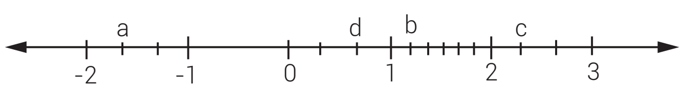
A) $\frac{18}{23}$

B) $\frac{6}{7}$

C) $\frac{99}{124}$

D) $\frac{18}{25}$

7. En la recta numérica de la figura, cada tramo entre dos números enteros consecutivos se ha dividido en partes iguales:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) c + a = d
B) c = 2b
C) a + 2b = d
D) b + d = c

8. En la recta numérica, ¿cuál de los siguientes números está más cerca del cero?

A) $0,25$
B) $-0,2\overline{1}$
C) $-0,3$
D) $0,\overline{2}$

9. $\left(\frac{0,05}{5}\right)^{-1} =$

A) –100
B) 10
C) 100
D) 1.000

10. El profesor les solicita a Pablo y Camila que calculen la expresión $\dfrac{\frac{5}{3}-\frac{5}{12}}{\frac{1}{4}}$, los desarrollos de ellos fueron los siguientes:

Pablo:

$$\frac{\frac{5}{3}-\frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} =$$

Paso 1

$$\frac{\frac{15}{12}}{\frac{1}{4}} =$$

Paso 2

$$\frac{15}{12}\cdot\frac{4}{1} =$$

Paso 3

$$\frac{60}{12} =$$

Paso 4

$$5 =$$

Camila:

$$\frac{\frac{5}{3}-\frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} =$$

Paso 1

$$\frac{5}{3}-\frac{5}{12}:\frac{1}{4} =$$

Paso 2

$$\frac{5}{3}-\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{1} =$$

Paso 3

$$\frac{5}{3}-\frac{20}{12} =$$

Paso 4

$$0 =$$

Según lo anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Pablo tuvo un error en el paso 2.
B) Pablo tuvo un error en el paso 3.
C) Camila tuvo un error en el paso 1.
D) Camila tuvo un error en el paso 4.

11. De los siguientes números racionales, ¿cuál es el menor?

A) $38 \cdot 10^{-3}$
B) $390 \cdot 10^{-4}$
C) $0,4 \cdot 10^{-3}$
D) $0,41 \cdot 10^{-2}$

12. El resultado de $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}{3{,}5}$, es un número

A) entero.
B) decimal finito.
C) decimal periódico.
D) decimal semiperiódico.

13. Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\dfrac{0{,}0\overline{2}}{3} > 0{,}006$

B) $\dfrac{0{,}\overline{5}}{4} > \dfrac{0{,}3\overline{2}}{3}$

C) $3 \cdot 0{,}2\overline{3} > 2 \cdot 0{,}\overline{3}$

D) $\dfrac{5}{11} < 0{,}\overline{4}$

14. m y n son números enteros múltiplos de p, ¿cuál de las siguientes expresiones **NO** es **siempre** un múltiplo de p?

A) $m + n$

B) $m - n$

C) $\dfrac{m}{n}$

D) $(m + n)^2$

15. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a un número racional **NO** entero?

A) $(0{,}2)^{-3}$

B) $3{,}\overline{9}$

C) $\dfrac{0{,}0\overline{2}}{0{,}2}$

E) $\dfrac{0{,}8\overline{3}}{0{,}1\overline{6}}$

16. ¿Cuál de los siguientes números **NO** está entre $1{,}0\overline{6}$ y 1,1?

A) $\dfrac{49}{45}$

B) $\dfrac{27}{25}$

C) $\dfrac{267}{250}$

D) $1\dfrac{4}{33}$

17. ¿Cuál de los siguientes números es el menor?

A) $0{,}25 \cdot 10^{-4}$
B) $0{,}0028 \cdot 10^{-3}$
C) $0{,}032 \cdot 10^{-5}$
D) $0{,}00075 \cdot 10^{-2}$

18. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $0{,}2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-2}$

B) $0{,}8 \cdot 10^{-2} : (4 \cdot 10^{-5}) = 2 \cdot 10^{-8}$

C) $0{,}002 \cdot 10^{-2} = 200 \cdot 10^{-7}$

D) $200 \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-3}) = 9 \cdot 10^{-2}$

19. Los tres primeros atletas en una carrera de 100 metros planos, fueron Pedro, Felipe y Andrés los cuales obtuvieron respectivamente las siguientes marcas: 12,2", 12,02" y 13,1", ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** ?

A) Felipe fue el vencedor.
B) Pedro llegó después de Andrés.
C) Felipe llegó 18 centésimas de segundo antes que Pedro.
D) Felipe demoró 1 segundo y 8 centésimas menos que Andrés.

20. En una cierta mina se extrajeron en cierto mes $3{,}7 \cdot 10^4$ kilos de mineral y al siguiente se extrajeron $4{,}2 \cdot 10^5$ kilos. Si una tonelada son 1000 kg, ¿qué variación hubo, medida en toneladas, entre lo extraído entre ambos meses?

A) 5
B) 38,3
C) 383
D) 416,3

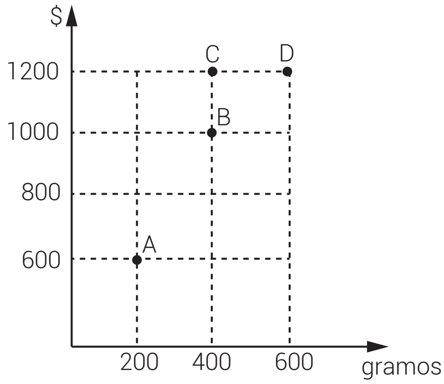
21. En su viaje de vacaciones, una persona recorrerá un trayecto en tres días. Si el primer día recorrió $\frac{2}{5}$ del trayecto y el segundo día los $\frac{3}{4}$ de lo que recorrió primer día, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El segundo y tercer día anduvo lo mismo.
B) Entre el primer y segundo día recorrió el 70% del trayecto.
C) El tercer día anduvo más que en el primero.
D) La diferencia de lo que recorrió el primer y segundo día equivale al 10% del trayecto total.

22. En una maratón cuya distancia era 42,2 km, se han colocado puestos para abastecer a los competidores. El agua se ha colocado cada 3 km, las barras proteicas cada 4 km y los plátanos cada 6 km, todos medidos desde el punto de partida, ¿en cuántas ocasiones van a coincidir los tres tipos diferentes de provisiones?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

23. Para un estudio acerca del precio de las paltas, se han tomado 4 muestras en los supermercados A, B, C y D. Los precios en cada una de las muestras se observan en el siguiente gráfico:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**, con respecto al precio del kilo de paltas?

A) B es más barata que C.
B) La más económica es D.
C) A es más cara que B.
D) C y D tienen el mismo precio.

24. En una cierta localidad ubicada al sur de nuestro territorio, a las 8 a.m. la temperatura del agua que sale por una llave es 6°C y debido al aumento de la temperatura ambiente, hasta las 15 horas esta va subiendo 8 décimas de grado por cada hora, ¿a qué hora la temperatura del agua que sale por esta llave alcanzará los 10°C?

A) A las 12 a.m.
B) A la 1 p.m.
C) A las 2 p.m.
D) No alcanza esa temperatura.

25. Se tienen tres estanques con 90, 105 y 120 litros respectivamente, con ellos se van a llenar bidones de un cierto tipo. ¿Qué capacidad tienen que tener estos bidones de modo que se ocupe la menor cantidad posible y al llenarlos no sobre ni falte líquido en los estanques?

A) 5 L
B) 10 L
C) 12 L
D) 15 L

26. m y n son números enteros, tales que m es múltiplo de 3 y n es múltiplo de 5, ¿cuál de las siguientes expresiones **NO** es siempre múltiplo de 9?

A) m^2n
B) $(mn)^2$
C) $m + 3n$
D) $m^2 + 18n$

27. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** da como resultado un número entero?

A) $\dfrac{10^{-2} + 1}{10^{-4} + 10^{-2}}$

B) $\dfrac{10^{-4} + 10^{-3}}{10^{-5}}$

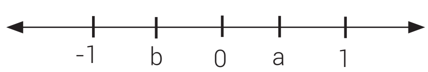
C) $(10^{-1} + 10^{-2})^{-1}$

D) $\dfrac{10^{-1} + 10^{-2}}{10^{-3} + 10^{-4}}$

28. Se define $a \ast b = \dfrac{ab}{a + b}$, entonces $0{,}5 \ast 2{,}2$ es

A) un número decimal finito.
B) un número decimal periódico menor que uno.
C) un número decimal periódico mayor que uno.
D) un número decimal semiperiódico.

29. Sean a y b dos números racionales que se ubican en la recta numérica, tal como se muestra en la siguiente figura:



¿Cuál de las siguientes desigualdades es **FALSA**?

A) $a - b < 2$

B) $-1 < a + b < 1$

C) $ab < b$

D) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} > 2$

30. Si $a = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ y $b = 15 \cdot 10^{-7}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $a \cdot b = 3 \cdot 10^{-10}$

B) $a^2 + b = 1{,}54 \cdot 10^{-6}$

C) $\dfrac{b}{a} = 7{,}5 \cdot 10^{-11}$

D) $a^2b = 6 \cdot 10^{-14}$

31. Si $P = 0{,}\overline{24}$, $Q = \dfrac{121}{500}$ y $R = \dfrac{11}{45}$, entonces al ordenarlos de menor a mayor, resulta

A) $P < Q < R$
B) $Q < R < P$
C) $R < P < Q$
D) $Q < P < R$

32. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $0{,}\overline{2} - 0{,}1\overline{5} = 0{,}0\overline{6}$
B) $0{,}3\overline{6} \cdot 0{,}\overline{45} = 0{,}1\overline{6}$
C) $0{,}\overline{32} + 0{,}\overline{8} = 1{,}\overline{12}$
D) $0{,}\overline{3} : 0{,}\overline{27} = 1{,}\overline{2}$

33. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El doble de $0{,}0\overline{5}$ es $0{,}\overline{1}$.
B) El inverso multiplicativo de $0{,}\overline{6}$ es 1,5.
C) El triple de $0{,}2\overline{3}$ es 0,7.
D) El cuadrado de $0{,}\overline{2}$ es $0{,}0\overline{4}$.

34. Jacinta gasta de sus ingresos, $\dfrac{3}{8}$ en arriendo, $\dfrac{3}{5}$ del resto en comida y la mitad de lo que le queda en locomoción y el resto que son \$ 100.000 lo ocupa para cancelar las cuentas básicas.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Gasta lo mismo en arriendo que en comida.
B) Gasta \$ 300.000 en arriendo.
C) Gasta el triple en arriendo que en locomoción.
D) En locomoción gasta más que en las cuentas básicas.

35. Francisco, Pedro, Andrés y Luis participan en la final de 100 metros de su colegio y el que gana asistirá a las olimpiada interescolar como representante.En la siguiente tabla se muestran las diferencias de tiempo, en el orden en que aparecen en la primera columna, que obtuvieron entre ellos al llegar a la meta:

Competidores	Diferencia de tiempo (en milésimas de segundo)
Francisco - Pedro	12
Pedro - Andrés	6
Luis – Pedro	4

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Francisco será el representante del colegio.
B) Luis se demoró 10 milésimas más que Andrés.
C) Andrés tuvo una mejor marca que Pedro.
D) Luis llegó 8 milésimas antes que Francisco.

36. Una crema para las arrugas se debe aplicar en dosis de 0,2 mg en cada aplicación.
Carolina desea calcular cuántas aplicaciones de esta crema se pueden realizar; sabiendo que el pote de esta crema tiene una masa de $\frac{1}{4}$ kg, entonces ella realiza el siguiente cálculo:

$$\frac{250\text{ g}}{0{,}2\text{ mg}}$$

Paso 1

$$\frac{250\text{ g}}{0{,}2 \cdot 10^{-3}\text{ g}}$$

Paso 2

$$\frac{250}{2 \cdot 10^{-2}}$$

Paso 3

$$125 \cdot 10^{2}$$

Paso 4

12.500 aplicaciones

¿En cuál de los pasos anteriores Carolina cometió un error?

A) En el Paso 1.
B) En el Paso 2.
C) En el Paso 3.
D) En el Paso 4.

2

37. Un número tiene dos cifras, tales que el de las unidades es B y el de las decenas es A, ¿cuál es la diferencia entre este número y el que resulta de intercambiar sus cifras (en ese orden)?

A) 9 (A – B)
B) 9 (B – A)
C) 11A – 9B
D) 11A + 9B

38. Si a y b son dígitos, entonces $\dfrac{0,a\overline{b}}{0,\overline{b}} =$

A) $\dfrac{a-b}{10}$

B) $\dfrac{10a-b}{10b}$

C) $\dfrac{10a+b}{10b}$

D) $\dfrac{9a+b}{10b}$

39. Si a y b son dígitos, ¿cuál de las siguientes fracciones es siempre igual al resultado de $0,a\overline{b} - 0,\overline{a}$?

A) $\dfrac{b-a}{9}$

B) $\dfrac{b-a}{90}$

C) $\dfrac{a-b}{90}$

D) $\dfrac{b-a}{900}$

40. Raúl va a su trabajo en su automóvil, al partir observa el cuentakilómetro y este marca las siguientes cifras $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{p}\boxed{q}$, al volver nota que el cuentakilómetros ahora marca $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{r}\boxed{s}$, si Raúl anduvo más de 1 km, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada?

A) Anduvo menos de 100 km.

B) Si $r = p$, entonces $s > q$.

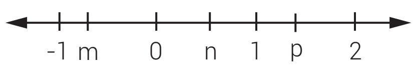
C) $s > q$.

D) $10r + s > 10p + q$

41. En un juego, se ocupan fichas blancas y rojas de modo que 3 rojas equivalen a dos blancas. Si en un momento Pedro tiene 8 blancas y 2 rojas, Francisco 6 blancas y 3 rojas y Andrés tiene 10 blancas y 1 roja, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** para ese instante del juego?

A) Francisco va perdiendo.
B) Lo que lleva Francisco equivale a 8 blancas.
C) Lo que lleva Pedro equivale a 2 blancas y 11 rojas.
D) Lo que lleva Francisco equivale a menos de 12 rojas.

42. En la recta numérica de la figura, se muestran las ubicaciones en ella de los números racionales, m, n y p. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es siempre verdadera?



A) $mn > -n$
B) $n - m < p$
C) $-1 < m + n < 1$
D) $np < p$

43. Si a y b son dígitos, tales que a > b, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

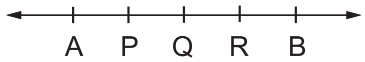
A) $0,a\overline{b} > 0,\overline{b}$

B) $b,a\overline{b} > a,\overline{ba}$

C) $b,\overline{a} > b,\overline{ab}$

D) $a, ab < a,\overline{a}$

44. En la figura, el punto A se ubica en el decimal 0,27 y el B en el 0,32. Si el trazo $\overline{AB}$ se ha dividido en cuatro partes iguales por los puntos P, Q y R, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La distancia entre A y P es 0,0125.
B) La distancia entre P y R es 0,025.
C) La distancia entre A y R es $3{,}75 \cdot 10^{-2}$.
D) La distancia entre A y B es $5 \cdot 10^{-3}$.

45. Sean $x = \frac{0{,}0025}{200}$; $y = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{2 \,.\, 10^{3}}$; $z = \frac{0{,}25}{20000}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $x < z < y$
B) $y < z < x$
C) $z < y < x$
D) $x = y = z$

46. Un año luz es aproximadamente $9{,}5 \,.\, 10^{12}$ km. Si la distancia de nuestro sistema solar a la galaxia Can Mayor es 28.000 años luz, entonces esta distancia expresada en metros es

A) $2{,}66 \cdot 10^{15}$
B) $2{,}66 \cdot 10^{17}$
C) $2{,}66 \cdot 10^{19}$
D) $2{,}66 \cdot 10^{20}$

47. El Byte es una unidad de almacenamiento de información utilizada en computación.
A continuación se muestran múltiplos del Byte según el Sistema Internacional de Medidas:

Múltiplo del Byte	Equivalencia en Bytes
Kilobyte	10^{3}
Megabyte	10^{6}
Gigabyte	10^{9}
Terabyte	10^{12}

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Un kilo megabyte equivale a un gigabyte.
B) Un kilo gigabyte equivale a un terabyte.
C) Un mega megabyte equivale a un terabyte.
D) Un mega gigabyte equivale equivale a un terabyte.

48. Suponiendo que un grano de sal tiene una masa de $50 \cdot 10^{-6}$ g, ¿cuántos granos hay en un kilógramo de sal?

A) $2 \cdot 10^{6}$
B) $2 \cdot 10^{7}$
C) $2 \cdot 10^{8}$
D) $2 \cdot 10^{10}$

49. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El 20% de $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ es $7 \cdot 10^{-4}$.
B) El 40% de 80.000 es $3{,}2 \cdot 10^{4}$.
C) El 75% de 0,00048 es $3{,}6 \cdot 10^{-3}$.
D) El 60% de $80 \cdot 10^{-4}$ es $4{,}8 \cdot 10^{-3}$.

50. Si m y n son números racionales tales que m > n, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) $2m > n$
B) $m^2 > n^2$
C) $m^3 > n^3$
D) $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

51. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es **siempre** verdadera?

A) El producto de dos racionales es racional.
B) El promedio de dos racionales es racional.
C) El producto entre la suma y la resta de dos racionales es racional.
D) El cuociente entre la suma y la resta de dos racionales es racional.

52. Si $A = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$, $B = 200 \cdot 10^{-4}$ y $C = 2000 \cdot 10^{-5}$, ¿cuál de las siguientes expresiones **NO** corresponde a un número entero?

A) $\frac{B}{A}$
B) $\frac{A}{C}$
C) $\frac{C^2}{AB}$
D) $\frac{A}{BC}$

53. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El inverso aditivo de $-0{,}02 \cdot 10^{8}$ es $2 \cdot 10^{6}$.
B) La mitad del recíproco de $1{,}25 \cdot 10^{5}$ es $4 \cdot 10^{-6}$.
C) El inverso multiplicativo de $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ es $5 \cdot 10^{-4}$.
D) El triple del inverso aditivo de $-0{,}09 \cdot 10^{-4}$ es $2{,}7 \cdot 10^{-5}$.

54. La edad de Paula hace A años era C, ¿qué edad tenía hace B años?

A) A + B + C
B) C – A + B
C) C – A – B
D) C + A – B

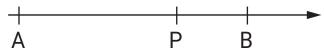
55. Helena tiene C litros de agua la cual la tiene envasada en bidones de 20 litros y botellas de 5 litros, todas completamente llenas. Si ella tiene A botellas, entonces ¿cuántos bidones tiene?

A) 20(C-5A)
B) $\dfrac{20}{5A - C}$
C) $\dfrac{20}{C - 5A}$
D) $\dfrac{C - 5A}{20}$

56. Felipe tiene A monedas de $ 500 y B monedas de $100. Si cambia todo este dinero por monedas de $ 50, ¿cuántas monedas recibirá?

A) $\dfrac{A + B}{50}$
B) 50(50A + 10B)
C) 10B + 2A
D) 10A + 2B

57. En la recta numérica de la figura, los puntos A y B se ubican en los números racionales $2 \cdot 10^{-4}$ y $5 \cdot 10^{-3}$ respectivamente. Si AP = 2PB, entonces P se ubica en el racional



A) $3{,}2 \cdot 10^{-3}$
B) $3{,}4 \cdot 10^{-3}$
C) $3{,}4 \cdot 10^{-5}$
D) $3{,}4 \cdot 10^{-7}$

58. En la tabla se muestran aproximadamente las masas del Sol, la Tierra y La Luna:

Cuerpo espacial	**Masa (kg)**
Sol	$2 \cdot 10^{30}$
Tierra	$6 \cdot 10^{24}$
Luna	$7 \cdot 10^{22}$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La masa del Sol comparada con la de la Tierra es más de $3{,}3 \cdot 10^{5}$ veces.
B) La masa de la Luna sumada con la de la Tierra es más de $6 \cdot 10^{24}$ kg.
C) La masa de la Tierra excede a la de la Luna en más de $5{,}9 \cdot 10^{24}$ kg.
D) Un millón de veces la masa de la Tierra es menor a la masa del Sol.

59. La fuerza gravitacional F entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 (medidas en kg) está dada por $F = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, donde G es la constante de gravitación universal que es aproximadamente $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 y r es la distancia entre los centros de los cuerpos.
Si $m_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ kg, $m_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ kg y $r = 2 \cdot 10^{-4}$ m, entonces la fuerza gravitacional entre estos cuerpos es

A) $1{,}34 \cdot 10^{-8}$ N
B) $1{,}34 \cdot 10^{-7}$ N
C) $1{,}34 \cdot 10^{-6}$ N
D) $1{,}34 \cdot 10^{-5}$ N

60. Si m y n son números racionales tales que m > n, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n}$

B) $\dfrac{1}{m+n} > \dfrac{1}{n}$

C) $\dfrac{1}{m-n} > \dfrac{1}{n}$

D) $(m-n)^2 > n-m$

Capítulo 3

POTENCIAS Y RAÍCES

El símbolo de raíz cuadrada lo utilizó por primera vez en 1525 el matemático polaco **Cristoph Rudolff**. En un principio era una “r” de “root” (raíz en inglés) que con el transcurso de los años se fue transformando.

CONCEPTOS CLAVES

- Base y exponente
- Conversión entre potencia y raíz
- Ecuaciones exponenciales
- Racionalización

3

DEFINICIONES

Definición de potencia

Si a es un número real y n es un número entero positivo, entonces la potencia a^n se define como el producto $a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n – veces).
También se define $a^0 = 1$ y $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$.
Definición de potencia de exponente fraccionario
Una potencia de exponente fraccionario es equivalente a una raíz:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

PROPIEDADES

1. Producto de potencias de igual base

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

2. División de potencias de igual base

$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$

3. Potencia de potencia

$(A^n)^m = A^{nm}$

4. Producto de potencias de igual exponente

$A^n \cdot B^n = (AB)^n$

5. División de potencias de igual exponente

$\frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n$

6. Igualdad de potencias

$A^n = B^n \rightarrow A = B$ (con $A \neq 0$, $A \neq 1$, $B \neq 0$, $B \neq 1$)

7. Eliminación de raíz

$\sqrt[n]{A^n} = |A|$. Si $A > 0$, se tiene que $\sqrt[n]{A^n} = A$

8. Producto de raíces de igual índice

$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB}$

9. División de raíces de igual índice

$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$

10. Amplificación y simplificación de índice con exponente

$\sqrt[nm]{A^{mp}} = \sqrt[n]{A^p}$; $\sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nm]{A^{mp}}$

11. Raíz de raíz

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[nm]{A}$

12. Ingreso de factor dentro de una raíz

$A \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n \cdot B}$ $(A > 0$ si n es par$)$

(*) Se entenderá la validez de las propiedades siempre que las raíces existan, es decir si están definidas en los reales.

RACIONALIZACIÓN

La racionalización consiste en eliminar las raíces que están en el denominador de una expresión fraccionaria. Veremos acá solo los casos más utilizados.

A) En el denominador aparece solo una raíz cuadrada y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por la misma raíz que aparece.

Ejemplo:

Racionalizar $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt{8} \cdot \dfrac{4 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \dfrac{4\sqrt{8}}{8} = \dfrac{\sqrt{8}}{2} = \dfrac{\sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

B) En el denominador aparecen adiciones y sustracciones donde uno o ambos términos son raíces cuadradas. En este caso, se amplifica la fracción de modo de formar una suma por su diferencia.

Ejemplo:

Racionalizar $\dfrac{9}{3 - \sqrt{3}}$

Amplificamos la fracción por $3 + \sqrt{3}$ para formar una suma por su diferencia.

$$\frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3}\,)}{(3 - \sqrt{3}\,) \cdot (3 + \sqrt{3}\,)} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3}\,)}{3^2 - (\sqrt{3}\,)^2} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3}\,)}{6} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{3}\,)}{2}$$

C) En el denominador aparece solo una raíz de índice superior a dos y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por una raíz del mismo índice de la que aparece, con un exponente tal que al sumar con el exponente de la raíz que aparece resulte un múltiplo del índice.

Ejemplo:

Racionalizar $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2^4}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt[3]{2^2}$, así al multiplicar ambas raíces se eliminará la raíz que aparece.

$$\frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2^2} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$$

3

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $\dfrac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} =$

Solución:
Cuando se tiene una suma o una resta de potencias de igual base, se debe factorizar por la menor potencia.
En la diferencia 3^{27} - 3^{25}, se factoriza por el factor 3^{25}, entonces nos queda, $3^{25} \cdot (3^2 - 1)$.
En la diferencia que se ubica en el denominador, factorizamos por 2^{27}, entonces resulta $2^{27} \cdot (2^2 - 1)$, por lo que la fracción dada queda de la forma:

$$\frac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} = \frac{3^{25}(3^2 - 1)}{2^{27}(2^2 - 1)} = \frac{3^{25} \cdot 8}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{3 \cdot 2^{27}} = \frac{3^{24}}{2^{24}}, \text{ o bien } \left(\frac{3}{2}\right)^{24} \text{ (prop. 5)}$$

2. Si $3^{x+5} - 3^{x+3} = 72$, determina el valor de x.

Solución:
Al igual que en el ejemplo 1, la diferencia de potencias $3^{x+5} - 3^{x+3}$ se puede calcular factorizando por 3^{x+3}:
$3^{x+3}(3^2 - 1) = 72$
$3^{x+3} \cdot 8 = 72$ /: 8
$3^{x+3} = 9$
$3^{x+3} = 3^2$, entonces $x + 3 = 2$ (prop. 6)
por lo tanto $x = -1$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} =$

Solución:
Como las raíces que aparecen tienen distinto índice, se pueden igualar amplificando el índice con el exponente (prop. 10), igualando todos los índices a su m.c.m que es 6:
En $\sqrt[3]{2^1}$, se amplifica el índice y el exponente por 2, $\sqrt[3]{2^1} = \sqrt[6]{2^2}$, en $\sqrt{2}$ se amplifican por 3, $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$.
Por lo que la expresión dada es equivalente a: $\dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}}$, por propiedades 8 y 9:

$\dfrac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^2 \cdot 2^3}{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2}}$, por prop. 2: $\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2}} = \sqrt[6]{2^4}$, simplificando el índice y el exponente, (prop.10) resulta $\sqrt[3]{2^2}$.

4. Si $m > 0$ y $m > n$, entonces $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} =$

Solución:
La expresión $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2}$ se puede poner de la forma: $\sqrt{(2m - n)^2}$, como $m > 0$ y $m > n$, se tiene que $2m > n$, por lo que $2m - n > 0$, por prop. 7; $\sqrt{(2m - n)^2} = 2m - n$.
La expresión $\sqrt{n^2 - 2mn + m^2}$ es equivalente a $\sqrt{(n - m)^2}$ pero $m > n$, por lo que $n - m < 0$, por prop. 7, $\sqrt{(n - m)^2} = |n - m| = m - n$.
Entonces $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} = (2m - n) - (m - n) = 2m - n - m + n = m$.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

3

1. $3^3 + 3^3 + 3^3 =$

A) 3^4
B) 3^9
C) 9^3
D) 9^9

2. $2^{10} + 2^{11} =$

A) 2^{21}
B) 4^{21}
C) 6^{10}
D) $3 \cdot 2^{10}$

3. $(0{,}00036)^{-3} : (6000)^{-3} =$

A) $6^{-3} \cdot 10^6$
B) $6^{-3} \cdot 10^{12}$
C) $6 \cdot 10^{24}$
D) $6^{-3} \cdot 10^{24}$

4. Juan calcula las potencias de 7 con exponente entero positivo, ¿cuál de los siguientes dígitos **NO** podría corresponder a la cifra de las unidades de las potencias obtenidas?

A) 1
B) 3
C) 8
D) 9

5. $\dfrac{2^4 + 2^5}{2^6 + 2^7} =$

A) 2^{-4}
B) 2^{-2}
C) 2^{-1}
D) 2^2

6. La suma de potencias $2^{n+2} + 2^{n}$, con n un número entero positivo mayor que 1, **NO** es siempre

A) un múltiplo de 5.
B) un número cuya cifra de las unidades es cero.
C) un múltiplo de 10.
D) mayor que 20.

7. La población de infectados por un cierto virus en una cierta comunidad, aumenta en un 20% cada mes. Si inicialmente la población infectada era de 1200 individuos y no se consideran los fallecimientos, entonces la cantidad de infectados al cabo de un año será de

A) $1200 \cdot (1{,}2)^{11}$

B) $1200 \cdot (1{,}2)^{12}$

C) $1200 \cdot (1{,}02)^{11}$

D) $1200 \cdot (1{,}02)^{12}$

8. Se ha estimado que un video promocional de un cantante top en una cierta red social, triplica la cantidad de visualizaciones cada 10 minutos, entonces si inicialmente hubo A usuarios que lo vieron, entonces a las 2 horas, la cantidad de usuarios que vieron este video, será

A) $A \cdot 3^{6}$

B) $2A \cdot 3^{6}$

C) $A \cdot 3^{12}$

D) $A \cdot 3^{24}$

9. Si n es un número entero, entonces $\dfrac{2^{n} - 2^{n-2}}{2^{n} + 2^{n-1}} =$

A) 2^{-3}

B) 2^{-2}

C) 2^{-1}

D) 2^{n-3}

10. Si $3^{n-1} + 3^{n-2} = 12$, entonces $n + 1 =$

A) 2
B) 2,5
C) 3
D) 4

11. La resta $2^{12} - 1$ **NO** es divisible por

A) 7
B) 9
C) 13
D) 25

12. La profesora de matemática encarga resolver la siguiente ecuación exponencial a Felipe, $(0,\overline{4})^{t-1} = \frac{8}{27}$.

A continuación se muestran algunos de los pasos que realizó Felipe para resolver la ecuación:

$$(0,\overline{4})^{t-1} = \frac{8}{27}$$

Paso 1

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{t-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

Paso 2

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{t-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

Paso 3

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2t-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

Paso 4

$$2t - 1 = 3$$

Al resolver la ecuación, ¿en cuál de los pasos cometió un error?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

13. El resultado de $2^{40} + 2^{39} + 2^{36}$ es un número que **NO** es divisible por

A) 5
B) 20
C) 75
D) 100

14. Una población de zorros en un cierta zona se reduce en una quinta parte cada 2 años, si P es la población inicial y t es la cantidad de años que transcurren, entonces la población que habrá a los t años será de

A) $P \cdot (0{,}2)^{t}$

B) $P \cdot (0{,}8)^{t}$

C) $P \cdot (0{,}8)^{2t}$

D) $P \cdot (0{,}8)^{\frac{t}{2}}$

15. La Escherichia Coli es una bacteria que vive en nuestro intestino, estudios científicos han determinado que cada una de ellas se duplica cada 20 minutos. Si en un cultivo se tienen A de estas bacterias, y suponiendo que estas no fallecen en el período de estudio, entonces a las t horas habrá:

A) $A \cdot 2^{t}$

B) $A \cdot 2^{3t}$

C) $A \cdot 2^{6t}$

D) $A \cdot 2^{\frac{t}{3}}$

16. La solución de la ecuación exponencial $(0{,}\overline{3})^{x-2} = 9$ es

A) -2
B) 0
C) 1
D) 2

17. La solución de la ecuación exponencial $(0{,}25)^{x} = 4^{x-2}$ es x =

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2

3

18. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $(4{,}5)^{-1} = 0{,}\overline{2}$
B) $(0{,}\overline{1})^{-2} = 3^4$
C) $(-0{,}\overline{3})^{-3} = 27$
D) $(0{,}1\overline{6})^{-3} = 216$

19. En la figura 2 se ha trazado un triángulo que une los puntos medios de la figura 1, en la figura 3 se ha trazado el triángulo que une los puntos medios del triángulo sombreado de la figura 2 y así sucesivamente hasta la n – ésima figura.
Si el área del triángulo de la figura 1 es A, entonces el área del triángulo sombreado de la n-ésima figura, con n > 1, es

A) $A \cdot 4^{-n}$
B) $A \cdot 4^{n-1}$
C) $A \cdot 4^{1-n}$
D) $A \cdot 4^{\frac{n-1}{3}}$

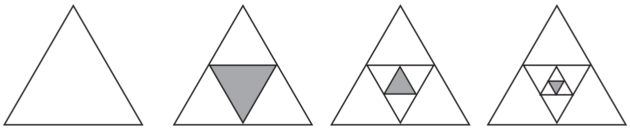


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

20. Si $2^{x+1} = 6$, entonces $2^x =$

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6

21. Si $A = 2^{-x} + 2^x$, entonces $4^{-x} + 4^x =$

A) $A^2 - 4$
B) $A^2 + 2$
C) $A^2 - 2$
D) A^2

22. Si p > 3 y n es un entero positivo tal que n > p, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el número mayor?

A) p^n
B) np^n
C) $(p + 1)^n$
D) $(-p)^n$

23. Si $2^n = p$ y $3^n = q$, entonces 6^{2n+2} =

A) p^2q^2
B) $36pq$
C) $36p^2q$
D) $36p^2q^2$

24. $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$ =

A) 0
B) $\sqrt{24}$
C) $6\sqrt{2}$
D) $\sqrt{60}$

25. $\dfrac{\sqrt{20} + \sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ =

A) 5
B) $\sqrt{5}$
C) $\sqrt{13}$
D) $2 + 3\sqrt{5}$

26. $(\sqrt{2} - 1)^2 - (1 + \sqrt{2})^2$ =

A) $-4\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{2}$
C) 2
D) 0

27. $\dfrac{\sqrt{2020}}{\sqrt{0{,}2020}}$ =

A) 10^4
B) 10^2
C) 10^{-2}
D) 10^{-1}

3

28. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} =$

A) $1+\sqrt{2}$

B) $\dfrac{1}{2}$

C) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

D) $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$

29. El resultado de $\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$ es un número que está entre

A) 1 y 2

B) 2 y 3

C) 3 y 4

D) 4 y 5

30. $\sqrt{\sqrt{5}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1} =$

A) 2

B) 4

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$

31. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{48}}{\sqrt{3}}} =$

A) 3

B) 9

C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$

32. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** corresponde a $\sqrt{2}$?

A) $\sqrt[4]{4}$

B) $\sqrt{50} - \sqrt{32}$

C) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$

D) $\sqrt{\sqrt{5}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1}$

33. $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} =$

A) $\sqrt[3]{2}$

B) $\sqrt[3]{2^2}$

C) $\sqrt[6]{2}$

D) $\sqrt[7]{2^2}$

34. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})^4 =$

A) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

B) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

C) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

D) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

35. Sean los números: $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$; $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; $z = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, entonces xyz =

A) $1 + \sqrt{6}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

D) $\sqrt{6}$

36. Si $ab = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, entonces a =

A) $3 + \sqrt{6}$

B) $3 + \sqrt{3}$

C) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

D) $-(1 + \sqrt{2})$

37. $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} =$

A) $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

B) $1+\sqrt{2}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

38. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es equivalente a $2\sqrt{6}$?

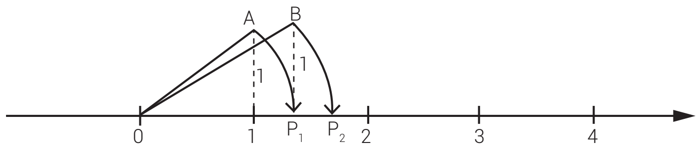
A) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}}$

B) $\sqrt{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{4\sqrt{3}}$

C) $\sqrt{2\sqrt{7}+2} \cdot \sqrt{2\sqrt{7}-2}$

D) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

39. En la recta numérica de la figura, en el cero se ubica el punto O, en el "1" se traza un segmento perpendicular a la recta numérica hasta el punto A de longitud 1, con centro en O y un radio de longitud OA se traza un arco de circunferencia que corta a la recta numérica en P_1, en P_1 se levanta una nueva perpendicular de longitud 1 hasta el punto B, con centro en O y radio OB se traza un nuervo arco de circunferencia que intercepta a la recta numérica en P_2, y así sucesivante hasta generar 10 de estos puntos "P".



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Solo 2 de estos puntos se ubican en números racionales.
B) Solo 4 de estos puntos se ubican entre el 2 y el 3, sin considerarlos.
C) Solo 2 de estos puntos se ubican entre el 3 y el 4, sin considerarlos.
D) Solo 3 de estos puntos están entre 1 y 2, sin considerar los extremos.

40. $\dfrac{\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{120}+\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}} =$

A) 2

B) 4

C) 8

D) $\sqrt[3]{5}$

41. Si a > 0, entonces $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}} =$

A) $\sqrt[3]{a}$

B) $\sqrt[4]{a}$

C) $\sqrt[9]{a}$

D) a^4

42. Se tiene que $p = \sqrt{2}$; $q = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$; $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $p = 2r$

B) $pq = \dfrac{1}{2}$

C) $p = 4q$

D) $p + r = 4q$

43. $(\sqrt{2})^{20}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} =$

A) 1

B) $\dfrac{1}{4}$

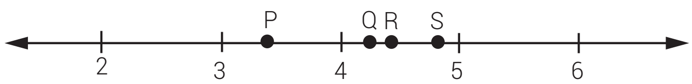
C) $\dfrac{9}{4}$

D) $\dfrac{3}{4}$

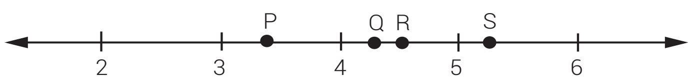
44. $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} =$

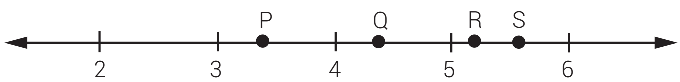
A) 1
B) 2
C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{6}$

45. Se tienen las siguientes números reales, $P = 2\sqrt{3}$, $Q = 3\sqrt{2}$, $R = 2\sqrt{5}$ y $S = 3\sqrt{3}$, ¿cuál de las siguientes rectas numéricas representa mejor a la ubicación de estos números en ella?

A) 

B) 

C) 

D) 

46. ¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera, si A y B son números racionales cualesquiera y n es un número entero mayor que 1?

A) $\sqrt[n]{A^n} = A$

B) $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$

C) $A\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n B}$

D) Todas son verdaderas.

47. Si $x > 0$, entonces $\sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} =$

A) 3

B) 9

C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$

48. Si a > 0, entonces $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} =$

A) $\sqrt{a^3}$
B) $\sqrt{a}$
C) $\sqrt[3]{a}$
D) $\sqrt[6]{a}$

49. Si a > 0, entonces $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} =$

A) a

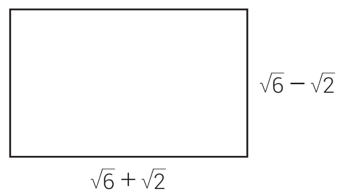
B) $\sqrt[3]{a}$

C) $\sqrt[3]{a^2}$

D) $a\sqrt[3]{a}$

50. En la figura, se muestran las dimensiones de un rectángulo, medidas en cm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Su área es 4 cm^2.
B) Su perímetro es $\sqrt{24}$ cm.
C) Su diagonal mide 4 cm.
D) El largo excede al ancho en $\sqrt{8}$ cm.



51. Si a > 0, ¿cuál de las siguientes igualdades es **FALSA**?

A) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^5}$

B) $a \cdot \sqrt[4]{a} = a^{1,25}$

C) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \sqrt[12]{a}$

D) $\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt{a}$

52. Joaquín debe resolver la siguiente ecuación exponencial, $\sqrt{25^t} = \sqrt[3]{5}$, para ello sigue los siguientes pasos:

$$\sqrt{25^t} = \sqrt[3]{5}$$

Paso 1

$$(\sqrt{25})^t = \sqrt[3]{5}$$

Paso 2

$$5^t = \sqrt[3]{5}$$

Paso 3

$$5^t = 5^{\frac{1}{3}}$$

Paso 4

$$t = \frac{1}{3}$$

Al hacer el cálculo, si es que lo cometió, ¿en cuál de los pasos cometió un error?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) No cometió ningún error.

53. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^9 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{10} =$

A) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

B) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

C) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

D) -1

54. Sean $p = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $q = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ y $r = \frac{5\sqrt{10}}{12}$, entonces se cumple que

A) $r < q < p$
B) $q < r < p$
C) $q < p < r$
D) $p < r < q$

55. Se tienen los siguientes números $x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[4]{3}$ y $z = \sqrt[6]{5}$, entonces al ordenarlos de menor a mayor resulta

A) $x < y < z$
B) $y < z < x$
C) $x < z < y$
D) $z < y < x$

56. Si $P = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$, entonces $P^2 =$

A) 8
B) 14
C) 16
D) $2\sqrt{2}$

57. La expresión $\sqrt[4]{(-2)^{-4}}$ es

A) $-\frac{1}{2}$
B) -2
C) $\frac{1}{2}$
D) un número que no es real.

58. El profesor de matemática le pide a Humberto desarrollar en la pizarra la siguiente expresión, $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$. A continuación se muestran los pasos del desarrollo de Humberto, si es que cometió un error, ¿en qué paso lo hizo?

$$\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} =$$

Paso 1

$$(2-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-2) =$$

Paso 2

$$(2-2) + (\sqrt{2}-\sqrt{2}) =$$

Paso 3

$$0$$

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) No cometió error.

3

59. Dada la igualdad $\sqrt[3]{a^{t-1}} = \sqrt[4]{a^{t+1}}$, con a > 0 y a ≠ 1, entonces t =

A) -7
B) -1
C) 1
D) 7

60. Si n < 0, entonces la expresión $\sqrt{9^n - 2 \cdot 6^n + 4^n}$ corresponde a

A) $3^n + 2^n$
B) $3^n - 2^n$
C) $2^n - 3^n$
D) 6^n

Capítulo
4

OPERATORIA ALGEBRAICA

Al-Juarismi, matemático de origen persa que vivió en el siglo IX, desarrolló el Álgebra, rama de la Matemática que generaliza la Aritmética, cuyo estudio son los números y sus operaciones

CONCEPTOS CLAVES

- **Factor o divisor**
- **Productos notables**
- **Factorización**
- **Ecuación de primer grado**
- **Sistemas de ecuaciones**

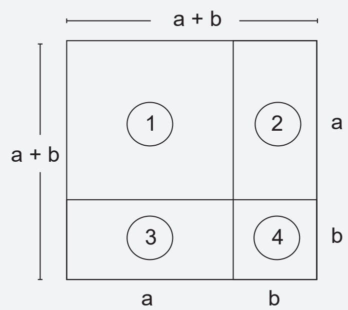
PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables más importantes son los siguientes:

Suma por su diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Cuadrado de binomio	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Producto de binomios con término común	$(ax + b)(ax + c) = (ax)^2 + (b + c)ax + bc$
Cuadrado de trinomio	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
Cubo de binomio	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Visualización geométrica de algunos productos notables:

- **Cuadrado de binomio:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



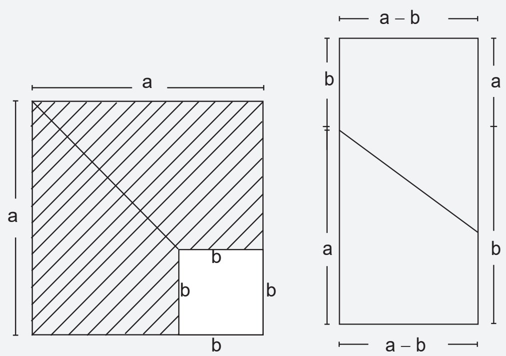
El cuadrado de lado $a + b$ se ha dividido en cuatro sectores cuyas áreas son las siguientes:
Área 1: a^2, Área 2: ab , Área 3: ab, Área 4: b^2.
Por lo tanto: $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$, de donde se concluye que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- **Suma por su diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

En la figura de la izquierda se tienen dos cuadrados de lados a y b respectivamente.

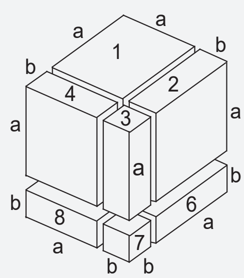
Si esta figura se recorta, se puede formar el rectángulo de la derecha, cuyos lados son $(a + b)$ y $(a - b)$.

Por lo tanto el área sombreada de la izquierda: $a^2 - b^2$ es igual al área del rectángulo de la derecha $(a + b)(a - b)$, por lo tanto $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.



- **Cubo de binomio:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

El cubo de arista $(a + b)$ de la figura, se ha dividido en 8 cuerpos, los volúmenes de cada uno de ellos son los siguientes:
$V1 = a^3$, $V2 = a^2b$, $V3 = ab^2$, $V4 = a^2b$, $V5 = a^2b$, $V6 = ab^2$, $V7 = b^3$ y $V8 = ab^2$.
La suma de los 8 volúmenes sería igual al volumen del cubo inicial que es $(a + b)^3$, con lo que se concluye que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



FACTORIZACIÓN

La factorización consiste en expresar sumas y restas en productos.

Las factorizaciones que más se utilizan son las siguientes:

Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Factorización de trinomio cuadrático	$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$, con $p + q = b$ y $pq = c$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Supongamos que tenemos la ecuación de primer grado $ax - b = 0$, al despejar x, obtenemos que $x = \frac{b}{a}$, entonces tenemos tres casos:

- Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $x = 0$.
- Si $a \neq 0$, entonces x tiene una única solución.
- Si $a = b = 0$, entonces x tiene infinitas soluciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right|$$

donde a, b, c, a', b' y c' son números reales y x e y son las soluciones.

Al encontrar las soluciones para "x" y para "y" lo que estamos encontrando es el punto donde se intersectan las rectas cuyas ecuaciones son las que aparecen en el sistema.

En el siguiente capítulo veremos los métodos de reducción, igualación y sustitución que permiten resolver este tipo de sistemas.

4

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $a - 2b + 3 = 0$, entonces $a^2 + 4b^2 - 3a + 6b - 4ab =$

A) -18
B) 0
C) 15
D) 18

Solución:

La expresión dada, la podemos factorizar por agrupación, para ello la ordenamos conveniente:

$a^2 - 4ab + 4b^2 - 3a + 6b$, los tres primeros términos corresponden al desarrollo de un cuadrado de binomio: $a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2$, mientras que la expresión restante: $-3a + 6b$, la podemos factorizar por -3, lo que nos queda $-3(a - 2b)$.

Entonces, $a^2 - 4ab + 4b^2 - 3a + 6b = (a - 2b)^2 - 3(a - 2b)$, pero $a - 2b + 3 = 0$, o equivalentemente $a - 2b = -3$, reemplazando este valor en $(a - 2b)^2 - 3(a - 2b)$, se obtiene $(-3)^2 - 3 \cdot -3 = 18$

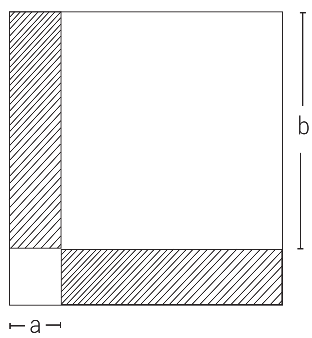
2. La figura está formada por dos cuadrados de lados a y b y dos rectángulos sombreados.
¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** corresponde al área sombreada?

A) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$

B) $2(a + b)b - 2b^2$

C) $2a(a + b) - a^2$

D) $\dfrac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{2}$



Solución:

Observa que los lados del cuadrado grande miden a+b, por lo que su área es $(a+b)^2$ y si a esta área le restamos las áreas de los cuadrados blancos obtenemos el área sombreada, entonces

área sombreada $= (a + b)^2 - a^2 - b^2 = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ luego A) es verdadera.

Observa que el área de la figura sombreada corresponde al área de dos rectángulos de lados a y b, luego su área es 2ab, esto lo ocuparemos para analizar cuál de las alternativas nos conducen a este valor.

En B) si desarrollamos la expresión $2(a + b)b - 2b^2 = 2ab + 2b^2 - 2b^2 = 2ab$, luego es correcta.

En C) si desarrollamos $2a(a + b) - a^2 = 2a^2 + 2ab - a^2 = a^2 + 2ab$, como esto no es equivalente a 2ab, esta alternativa no corresponde al área sombreada.

Ahora desarrollaremos la expresión de la alternativa D)

$\dfrac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{2} = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2} = 2ab$ lo que corresponde al área sombreada.

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es un factor de $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$?

A) ab
B) a + b
C) a – b
D) $a^2 - b^2$

Solución:

La expresión $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$, se puede factorizar por el factor común $(a - b)^2$, entonces nos queda: $(a - b)^2 (a - b + 2b) = (a - b)^2 (a + b)$, observa que esta última expresión tiene como factores o divisores a las siguientes expresiones: $(a - b)$, $(a + b)$ o $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, sin embargo ab no es uno de los factores, luego la alternativa A) no es un factor de la expresión dada.

4. Las aristas de dos cubos miden respectivamente (a+b) y (a-b) unidades.
¿Cuál es la diferencia, en ese orden, en unidades cúbicas, entre sus volúmenes?

Solución:

El volumen de cubo de arista a es a^3, por lo tanto el volumen del primer cubo es $(a + b)^3$,

según el producto notable de un cubo de binomio, tenemos que

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, mientras que el volumen del segundo cubo es

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, restando ambos volúmenes, tenemos:

$(a + b)^3 - (a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = 6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2)$.

5. Si (1, -2) es solución del sistema de ecuaciones $\begin{array}{l|} p(x + 1) - 2q(y + 3) = 14 \\ p(x + 2) + q(y - 2) = 26 \end{array}$, entonces p + q =

A) -7
B) -3
C) 5
D) 7

Solución:

Si reemplazamos x por 1 e y por -2 en el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$\begin{array}{l|} 2p - 2q = 14 \\ 3p - 4q = 26 \end{array}$, multiplicamos la primera ecuación por -2 (para que los coeficientes de q queden opuestos):

$\begin{array}{l|} -4p + 4q = -28 \\ 3p - 4q = 26 \end{array}$, sumando ambas ecuaciones, obtenemos p = 2, reemplazando en la segunda ecuación se tiene que $6 - 4q = 26 \rightarrow q = -5$, entonces p + q = -3, respuesta B).

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. $(x - y)^2 - (2x + y)^2 =$

A) $-3x^2 - 6xy + 2y^2$
B) $-3x^2 + 2y^2$
C) $-3x^2$
D) $-3x(x + 2y)$

2. ¿Cuánto vale $a^2 - ab + b^2$, si $a = -2$ y $b = -1$?

A) −5
B) 1
C) 3
D) 7

3. $x - 2 - (x - (x + 2)) =$

A) x
B) $-x$
C) $-x - 4$
D) $x - 4$

4. Si $x = 2$ e $y = -1$, entonces el valor numérico de $2x - (x - y - (x - y - (x + y)))$ es

A) −1
B) 1
C) 3
D) 4

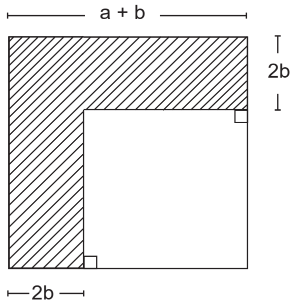
5. Si $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 2mb$, entonces $m =$

A) b
B) -b
C) 2b
D) -2b

6. Si R = $x^2 + 2ax + 2a^2$, ¿cuál de las siguientes expresiones se puede factorizar como un cuadrado de binomio ?

A) $R + 2a^2$
B) $R - 2a^2$
C) $R + 2a(x + a)$
D) $R - a(2x + a)$

7. Si en la figura se tiene un cuadrado de lado (a + b), entonces ¿cuál de las siguientes expresiones **NO** corresponde al área sombreada?



A) $2ab$
B) $2a(a + b) - 2a(a - b)$
C) $2b(a + b) + 2b(a - b)$
D) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

8. $(2x - z)^2 - (x + z)^2 - (x - z)(x + z) =$

A) $2x^2 + z^2$
B) $2x^2 - z^2$
C) $2x^2 - 6xz - z^2$
D) $2x^2 - 6xz + z^2$

9. Anita es una profesora que tiene $(a^3 - b^3)$ dulces y los repartirá entre sus $(a - b)$ estudiantes, entonces los dulces que recibe cada uno es

A) $a^2 - ab + b^2$
B) $a^2 + 2ab + b^2$
C) $a^2 + ab + b^2$
D) $a^2 - 2ab + b^2$

10. Dada la igualdad, $P = 2S + kT$, entonces $P^2 - 2PkT + k^2T^2 =$

A) $2S$
B) $2S^2$
C) $4S^2$
D) $-4S^2$

11. Ely debe desarrollar la expresión, $(x - 2y)^2 - (x + 3y)^2$, los pasos que realiza son los siguientes:

$$(x - 2y)^2 - (x + 3y)^2$$

Paso 1

$$= (x^2 - 4xy + 4y^2) - (x + 3y)^2$$

Paso 2

$$= (x^2 - 4xy + 4y^2) - (x^2 + 6xy + 9y^2)$$

Paso 3

$$= x^2 - 4xy + 4y^2 - x^2 - 6xy + 9y^2$$

Paso 4

$$= -10xy + 13y^2$$

Al desarrollar la expresión, ¿en cuál de los pasos cometió un error?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

12. Si $4p^2 - 4q^2 = 72$ y $\frac{p - q}{3} = 1$, entonces $p + q =$

A) 6
B) 9
C) 12
D) 15

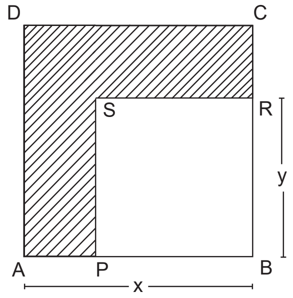
13. Si $a = -4$, $a = 2c$ y $a^2 - 2ac + 3bc = 12$, entonces $b =$

A) -10
B) -2
C) 2
D) 10

14. Los lados de un cuadrado de lado a unidades se aumentan en m unidades, entonces el aumento del área del cuadrado equivale al área de

A) un rectángulo de lados m y $(a + m)$ unidades.
B) un rectángulo de lados m y $(2a + m)$ unidades.
C) un cuadrado de de lado m unidades.
D) un cuadrado de lado $(a - m)$ unidades.

15. En la figura, ABCD y PBRS son cuadrados, ¿cuál de las siguientes expresiones **NO** representa el área de la figura sombreada?



A) $x^2 - y^2$

B) $(x - y)y + (x - y)x$

C) $(x - y)^2 + 2y(x - y)$

D) $(x + y)^2 - 2y(x - y)$

16. La factorización de la expresión $x^2 - y^2 - 3x - 3y$ es

A) $(x - y)(x + y - 3)$

B) $(x + y)(x - y + 3)$

C) $(x + y)(x - y - 3)$

D) $(x - y)(x - y + 3)$

17. Si $x - y = 4$, entonces $3 - 2x + 2y =$

A) -5

B) 4

C) 5

D) 11

18. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es factor de $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$?

A) $x + y$

B) $(x + y)^2$

C) $x^2 - y^2$

D) $x^2 + y^2$

19. Si $a - b = 5$, entonces $a^2 + 3a + b^2 - 2ab - 3b =$

A) 10

B) 30

C) 40

D) Falta información para determinarlo.

20. ¿Cuál de las siguientes expresiones se debe sumar a $x^4 + 4y^2$ para que se forme un trinomio perfecto?

A) $-2xy$
B) $2x^2y$
C) $-4x^2y$
D) $4xy^2$

21. Un número tiene dos cifras, siendo la cifra de las unidades a y la de las decenas b, entonces ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al cuadrado del número?

A) a^2b^2
B) $100b^2 + a^2$
C) $100a^2 + 20ab + b^2$
D) $100b^2 + 20ab + a^2$

22. Antonia debe desarrollar la expresión, $(x + 2y)^2 - 2(x - y)^2$, los pasos que realiza son los siguientes:

$$(x + 2y)^2 - 2(x - y)^2$$

Paso 1

$$= (x^2 + 4xy + 4y^2) - 2(x - y)^2$$

Paso 2

$$= (x^2 + 4xy + 4y^2) - (2x - 2y)^2$$

Paso 3

$$= x^2 + 4xy + 4y^2 - (4x^2 - 8xy + 4y^2)$$

Paso 4

$$= -3x^2 + 12xy$$

Al desarrollar la expresión, ¿en cuál de los pasos cometió un error?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

23. Santiago elige un número entero positivo cualquiera mayor que uno, lo eleva al cubo y esto lo resta con el número inicial, con respecto a la resta obtenida, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es siempre verdadera?

A) es un número par.
B) es un múltiplo de 3.
C) es un múltiplo de 5.
D) es el producto de tres números consecutivos.

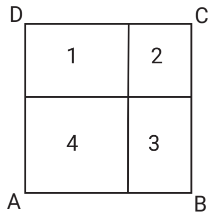
24. Dos ecuaciones se dicen equivalentes si tienen el mismo conjunto solución, ¿cuál de las siguientes ecuaciones **NO** es equivalente a la ecuación $0{,}1x - 0{,}2 = 5x$?

A) $x - 2 = 50x$
B) $-0{,}2 = 4{,}9x$
C) $10x = 500x + 2$
D) $49x = -2$

25. Si para todo valor de x se cumple que $(x + a)(x - b) = x^2 + 10x + c$, con a, b y c números enteros distintos de cero y $c < 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $a > b$
B) $ab > 0$
C) $b - a = -10$
D) $a^2 > b^2$

26. En la figura, ABCD es un cuadrado que se ha dividido en 4 figuras, donde la 2 y la 4 son cuadrados. Si el área de ABCD es $(4a^2 + 4ab + b^2)$ y el área de la fig. 2 es b^2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



A) El área de la fig. 4 es a^2.
B) El área de la fig. 1 es ab.
C) Las figs. 1 y 3 tienen distinta área.
D) La diferencia entre las áreas de las figs. 4 y 2 es $(2a + b)(2a - b)$.

27. El área de un rectángulo es $(2x^2+5x+3)$ donde el largo mide $(2x+3)$ unidades. Si el largo aumenta en 2 unidades y el ancho en una, entonces el área del rectángulo aumenta en 27 unidades cuadradas. ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo original?

A) 5 unidades
B) 6 unidades
C) 7 unidades
D) 13 unidades

28. Sea la ecuación en x, $ax - a^2 = bx - b^2$, con $a \neq b$, entonces la solución de la ecuación es x =

A) $a - b$

B) $a + b$

C) $\frac{b}{a}$

D) $b - a$

29. Si $2^a \cdot 2^b = 8$ y $\frac{2^a}{2^b} = \frac{1}{4}$, entonces $\frac{b}{a} =$

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 5

D) 2

30. (1, -2) es solución del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2px + (q-1)y = 2 \\ px + 2y = 5 \end{array}\right|$, entonces p + q =

A) 8
B) 9
C) 16
D) 18

31. Si (2, 3) es solución del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax + (b-1)y = 2 \\ 4x - (b+2)y = 5 \end{array}\right|$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

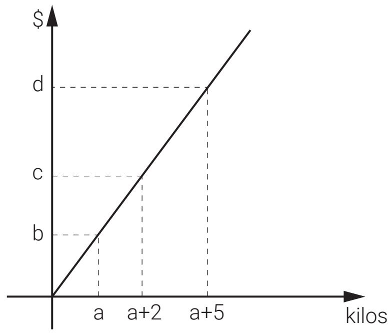
A) $a = 4$

B) $a + b = 3$

C) $a - b = 2$

D) $a - 3b = 7$

32. En el gráfico de la figura, se muestra la relación entre el precio (eje vertical) y el número de kilos de pan (eje horizontal), según la información obtenida ayer en la panadería más cercana:



Según este gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **no** es siempre verdadera?

A) $\frac{c}{a+2} = \frac{b}{a}$

B) $c - b = 2$

C) 1 kilo cuesta $\frac{b}{a}$ pesos.

D) 3 kilos cuestan $(d - c)$ pesos.

33. Sea el binomio, $x^2 + \frac{25}{4}$, ¿cuál de las siguientes expresiones hay que sumar a este binomio para que se convierta en un trinomio cuadrado perfecto?

A) $\frac{5}{2}x$

B) $-\frac{5}{2}x$

C) $-5x$

D) $10x$

34. En un patio rectangular se instala una piscina rectangular, dejando una franja constante alrededor de ella de 2 metros. Si esta franja tiene un área de $40\ u^2$, entonces el perímetro del patio es

A) 7 u
B) 14 u
C) 21 u
D) 28 u

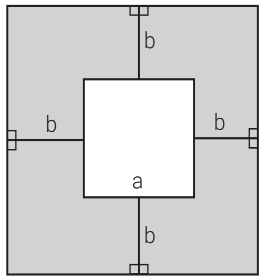
35. En la figura, se tienen dos cuadrados de lados respectivamente paralelos, con la información dada, ¿cuál de las siguientes opciones **no** corresponde al área sombreada?

A) $(a + 2b)^2 - a^2$

B) $4b(a + b)$

C) $4ab + 2b^2$

D) $2b(a + 2b) + 2ab$



36. Pedro y Antonio son vecinos y sus sitios tienen forma rectangular de modo que tienen un fondo de b metros y el frente del sitio Antonio tiene a metros. Si el frente del sitio de Pedro tiene 10 metros más, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **no** se puede deducir de la información dada?

A) El sitio de Pedro tiene un área de $(10b)\ m^2$ más que el de Antonio.

B) Los dos sitios tiene en total un área de $b(2a + 10)\ m^2$.

C) Si cada uno cierra sus sitios por sus cuatro costados, considerando que el lado común se cierra por ambos lados, entonces el cierre de Pedro tiene 10 m más que el de Antonio.

D) El área del sitio de Antonio equivale a un $\frac{a}{a+10} \cdot 100$ % del área del sitio de Pedro.

37. Se tiene que $2^a = \frac{16}{2^{-b}}$ y $4^{a+b} = 32$, entonces $a^2 - b^2 =$

A) 5

B) 10

C) 20

D) 50

38. En un rectángulo, el largo y el ancho miden $(2x - 3)$ y $(x + 2)$ unidades respectivamente con $x > 5$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El área es $(2x^2 + x - 6)$ unidades cuadradas.

B) El perímetro es $(6x - 2)$ unidades.

C) La diagonal mide $\sqrt{5x^2 - 8x + 13}$ unidades.

D) El largo excede al ancho en $(x - 1)$ unidades.

39. Si $a + b = 2p$ y $a^2 + b^2 = 2p^2$, entonces $ab =$

A) p^2

B) $-p^2$

C) p

D) $2p^2$

40. Sea la ecuación en x, $ax = p + bx$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si $p = 0$ y $a \neq b$, entonces $x = 0$.

B) Si $p = 0$ y $a = b$, entonces la ecuación tiene infinitas soluciones.

C) Si $a \neq b$, entonces la ecuación tiene una única solución.

D) Si $a = b$ y $p \neq 0$, entonces la ecuación tiene una única solución.

41. ¿Cuál de los siguientes pares ordenados corresponde a la solución del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 5x + 4y = 6 \end{array}\right|$?

A) (5, 1)

B) (2, -1)

C) (6, -6)

D) (-4, -5)

42. Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right|$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $0 < x + y < 1$

B) $x > y$

C) $x + y < 1$

D) $xy > 0$

43. Sean a, b y c números racionales tales que para cualquier valor racional de x se cumple la igualdad $(2x - 5)(x + 2) = 2x^2 - (a + b)x + c$, entonces $ac + bc =$

A) 10

B) -10

C) -30

D) 30

44. El área de un cuadrado es ($a^2 + 6a + 9$) unidades cuadradas, si el lado aumenta en 2 unidades, entonces una expresión que representa la variación del área del nuevo cuadrado con respecto al área del cuadrado original en unidades cuadradas, es

A) $4a + 16$

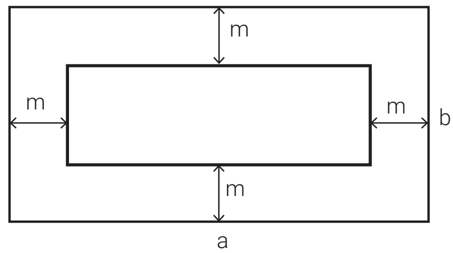
B) $10a + 25$

C) $a^2 + 10a + 25$

D) 16

4

45. En un patio rectangular de dimensiones a y b metros, se ha instalado una piscina rectangular, dejando una franja embaldosada de ancho constante de m metros, tal como se muestra en la figura, ¿cuántos m^2 tiene esta zona?



A) $2m(2m - a - b)$

B) $m(a + b - m)$

C) $2m(a + b - 2m)$

D) $2m(a + b - m)$

46. Si $a + b = -c$, entonces $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac =$

A) 0

B) c^2

C) $2c^2$

D) $-2c^2$

47. Sean a y b números racionales, tales que $\frac{a}{b} < 0$ y $a+b \neq 0$. Si $M = a^2 + b^2$; $N = (a + b)^2$; y $P = \frac{a^3+b^3}{a+b}$, entonces al ordenarlos de menor a mayor, resulta:

A) $M < N < P$

B) $N < M < P$

C) $N < P < M$

D) $P < M < N$

48. Si $a + b = 3$, $b + c = 4$ y $a + c = 5$, entonces $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac =$

A) 12

B) 24

C) 36

D) 144

49. Si $a + b + c = 0$, con a,b y c reales distintos de cero, entonces $\frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} =$

A) 0

B) 3

C) -3

D) -1

50. Si $a + b = 6$ y $ab = 3$, entonces $a^2 + b^2 =$

A) 26
B) 30
C) 36
D) 42

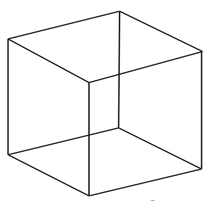
51. Se tiene que $a^2 + ab - 2b^2 = 18$ y $a - b = 6$, entonces $a^2 - b^2 =$

A) 3
B) 6
C) 12
D) 24

52. El largo y el ancho de un rectángulo miden $(2x + 3)$ y $(x - 2)$ metros respectivamente, con $x > 2$. Si el largo disminuye en 2 metros y el ancho en 1 metro, entonces la variación del área del nuevo rectángulo respecto del primero, en metros cuadrados es

A) $4x + 3$
B) $3 - 4x$
C) 2
D) 3

53. En el prisma recto de base cuadrada de la figura, la arista basal mide a unidades y la arista lateral mide b unidades. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** corresponde a su área en unidades cuadradas?



A) $2a(a + 2b)$
B) $a^2 - 4b^2 + (a + 2b)^2$
C) $2((a + b)^2 - b^2)$
D) $2(a + b)^2 - b^2$

54. Si $a + b = 2$ y $a^2 + b^2 = 6$, entonces $a^3 + b^3 =$

A) 10
B) 12
C) 14
D) 18

4

55. Si $(a + b)^2 = n$ y $(a - b)^2 = p$, entonces $ab =$

A) $n - p$

B) $\dfrac{n - p}{4}$

C) $\dfrac{p - n}{4}$

D) $\dfrac{n + p}{4}$

56. Si $m^2 + n^2 = 25p^2$ y $mn = 12p^2$, con $p \neq 0$, y $m \neq n$, entonces $\left(\dfrac{m+n}{m-n}\right)^2 =$

A) $-7p$

B) $7p$

C) 7

D) 49

57. Un cordel que mide "L" metros de largo se corta en dos trozos donde uno de ellos mide "a" metros. Si con cada uno de estos trozos se formó un cuadrado, entonces la suma de las áreas de estos cuadrados, medida en m^2 es

A) $2a^2 + L^2$

B) $2a(a - L) + L^2$

C) $\dfrac{L(2a - L)}{16}$

D) $\dfrac{2a(a - L) + L^2}{16}$

58. Si $a^3 - b^3 = 36$ y $a - b = 6$, entonces $ab =$

A) -10

B) 10

C) 14

D) 36

59. En un rectángulo, su diagonal mide 25 unidades y su perímetro es 62 unidades, ¿cuál es su área, medida en unidades cuadradas?

A) 42
B) 84
C) 168
D) 1609,5

60. a, b y p son números, tales que $a < b$ y $p > 0$. Si $a + b = 4p$ y $ab = 2p^2$, entonces $\dfrac{a+b}{a-b} =$

A) 1

B) 2

C) $-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}$

Capítulo 5

PLANTEO DE PROBLEMAS

George Pólya (1887-1985) matemático húngaro, es uno de los nombres míticos en la historia moderna de las matemáticas y sus estudios y publicaciones estuvieron referidas a la resolución de problemas.

CONCEPTOS CLAVES

- **Traducción a lenguaje algebraico**
- **Ecuación de primer grado**
- **Sistemas de ecuaciones**

TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO A LENGUAJE ALGEBRAICO

Si queremos resolver un problema, a través del planteo de una ecuación, debemos traducir lo expresado en el enunciado a lenguaje algebraico, para ello es conveniente considerar las siguientes conversiones.

El doble de x..	$2x$
El triple de x..	$3x$
El sucesor de n..	$n + 1$ (si $n \in \mathbb{N}$)
El antecesor de n	$n - 1$ (si $n \in \mathbb{Z}$)
El cuadrado de x..	x^2
El cubo de x..	x^3
El inverso aditivo u opuesto de x............................	$-x$
A sumado con B..	$A + B$
A restado con B..	$A - B$
B disminuido en A..	$B - A$
A sustraído de B..	$B - A$
El producto entre A y B..	$A \cdot B$
El cuociente entre A y B..	$\frac{A}{B}$ (con $B \neq 0$)
El inverso multiplicativo o recíproco de x.............	x^{-1} o $\frac{1}{x}$ (si $x \neq 0$)
Suma de los cuadrados entre A y B......................	$A^2 + B^2$
Cuadrado de la suma entre A y B...........................	$(A + B)^2$

Número de dos cifras con el digito de las decenas es d y el de las unidades es u.....$10d + u$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema lineal de ecuaciones, con dos variables y dos incógnitas, es de la forma:

$\begin{array}{l|} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ \hline \end{array}$, donde las incógnitas son "x" e "y" y los coeficientes son números reales.

Existen diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones, los más importantes son:

- Igualación
- Sustitución
- Reducción

Veamos algunos ejemplos, para distinguir cada uno de estos métodos.

Igualación

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l|} 2x - y = 13 \\ 6x + y = 19 \\ \hline \end{array}$

Tanto en la primera como en la segunda ecuación despejamos "y" (o bien la otra incógnita):

Ecuación (1): $2x - y = 13 \rightarrow y = 2x - 13$

Ecuación (2): $6x + y = 19 \rightarrow y = 19 - 6x$, igualando ambas expresiones para "y", tenemos:

$2x - 13 = 19 - 6x \rightarrow 8x = 32 \rightarrow x = 4$

Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos el valor de "y".

Por ejemplo si se reemplaza x = 4 en la primera ecuación, obtenemos $8 - y = 13 \rightarrow y = -5$.

5

Sustitución

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 28 \\ 3x + 2y = 9 \end{array}\right|$

Este método consiste en que en una de las dos ecuaciones despejamos una de las incógnitas, posteriormente, este valor obtenido se reemplaza en la otra ecuación.

Por ejemplo, si en la primera ecuación despejamos "y", tenemos que $y = 5x - 28$, ahora esta expresión la reemplazamos en la otra ecuación:

$3x + 2(5x - 28) = 9 \rightarrow 13x = 65 \rightarrow x = 5$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de "y".

Si en la primera ecuación, reemplazamos x por 5, se obtiene: $25 - y = 28 \rightarrow y = -3$.

5

Reducción

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 49 \\ 5x + 3y = 15 \end{array}\right|$

Este método consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por ciertos factores, de modo que al sumar o restar ambas ecuaciones se elimine una de las incógnitas.

En este sistema, por ejemplo eliminaremos la incógnita "y" para ello multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 5, de modo que los coeficientes de "y" queden cambiados de signo:

$\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 49 \\ 5x + 3y = 15 \end{array}\right| \begin{array}{l} /\cdot 3 \\ /\cdot 5 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x - 15y = 147 \\ 25x + 15y = 75 \end{array}\right|$, sumando ambas ecuaciones, se obtiene $37x = 222 \rightarrow x = 6$, reemplazando este valor en cualesquiera de las ecuaciones, se obtiene $y = -5$.

En los ejercicios resueltos, veremos cómo los sistemas de ecuaciones nos permitirán resolver problemas.

5

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Felipe tiene dos cuentas corrientes y en una de las cuentas tiene los $\frac{2}{3}$ de lo que tiene en la otra.

Si saca \$500.000 de una de ellas y la deposita en la otra, quedan iguales.

¿Cuánto dinero tenía inicialmente en cada una de ellas?

Solución:

Supongamos que los montos que tiene en las cuentas corrientes son x y $\frac{2}{3}x$.

Si saca \$500.000 y lo deposita en la otra, entonces en cada una de ellas tendrá:

$x - 500000$ y $\frac{2}{3}x + 500000$, asumimos que debe sacar de la que tiene más dinero ya que posteriormente se afirma que quedan iguales:

$x - 500000 = \frac{2}{3}x + 500000 \rightarrow x - \frac{2}{3}x = 1000000 \rightarrow \frac{1}{3}x = 1000000 \rightarrow x = 3000000,$

Por lo tanto, lo que tenía inicialmente en las cuentas era: $x = \$3.000.000$ y $\frac{2}{3}x = \$2.000.000$

2. Un número tiene dos cifras de modo que la cifra de las decenas tiene una unidad más que el triple de la cifra de las unidades. Si se suma el número con el número que resulta de invertir sus cifras, resulta 99, ¿cuál es el número?

Solución:

Supongamos que la cifra de las unidades es x, entonces según la información dada, la cifra de las decenas es $3x + 1$.

Sabemos que si un número tiene dos cifras, donde las unidades es "u" y las decenas es "d", entonces el número es u+10d, y en este caso el número es $x + 10 \cdot (3x + 1)$, entonces el número con las cifras invertidas sería $10x + (3x + 1)$.

El enunciado afirma que si se suman estos dos números el resultado es 99, entonces

$x + 10 \cdot (3x + 1) + 10x + (3x + 1) = 99$, resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 2$, por lo tanto el número es 72.

3. La suma de las edades de dos hermanos es 25 años y en 5 años más uno va a tener los $\frac{3}{4}$ de lo que tendrá el otro. ¿Qué edades tienen actualmente?

Solución:

Supongamos que las edades son x e y, entonces $x + y = 25$, en cinco años más las edades serán $x + 5$; $y + 5$, entonces $x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5)$.

Entonces el enunciado nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5) \end{array}\right|$$, multiplicando la segunda ecuación por 4, para eliminar las fracciones, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x + 20 = 3(y + 5) \end{array}\right|$$, ordenando, se llega al sistema: $$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x - 3y = -5 \end{array}\right|.$$

Podemos resolver este sistema con cualquiera de los métodos vistos anteriormente, acá lo resolveremos por sustitución.

Despejamos una incógnita de la primera ecuación, por ejemplo si despejamos"x", tenemos $x = 25 - y$, y esto lo reemplazamos en la segunda ecuación: $4(25 - y) - 3y = -5$, resolviendo esta ecuación obtenemos $y = 15$, sustituyendo en cualesquiera de las ecuaciones obtenemos $x = 10$, luego las edades son 10 y 15 años.

4. Francisco lleva ahorrado \$5.200 en monedas de \$100 y \$500.
Si el total de monedas son 20, ¿cuántas tiene de cada denominación?

Solución:

Supongamos que tiene x monedas de \$100 e y monedas de \$500, entonces podemos plantear el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ 100x + 500y = 5200 \end{array}\right|$$, en este sistema se puede reducir la segunda ecuación si dividimos por 100:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x + 5y = 52 \end{array}\right|$$, si restamos la segunda ecuación con la primera (o usando cualquier otro método),

se obtiene: $5y - y = 32 \rightarrow y = 8$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se concluye que $x = 12$,

luego tiene 12 monedas de \$100 y 8 monedas de \$500.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. En enunciado, "el doble del cuadrado de A equivale al triple del sucesor del cuadrado de B", se puede expresar mediante la igualdad

A) $(2A)^2 = 3(B + 1)^2$
B) $2A^2 = 3(B^2 + 1)$
C) $(2A)^2 = 3B^2 + 1$
D) $2A^2 = 3B^2 + 1$

2. Si un sector rectangular tiene un perímetro de 40 m y es de tal manera que su ancho tiene 4 m menos que su largo, la ecuación que permite conocer el ancho "x" es:

A) $2x + 4 = 40$
B) $4x + 4 = 40$
C) $2x - 4 = 20$
D) $2x + 4 = 20$

3. ¿Qué número entero es tal que al sumarle el triple de su antecesor da 77?

A) 19
B) 20
C) 21
D) 22

4. ¿Qué número par es tal que al sumarlo con su sucesor par da 42?

A) 10
B) 12
C) 20
D) 24

5. En un rectángulo el largo mide 3 cm más que el ancho y su perímetro es 54 cm.
¿Cuánto mide su largo?

A) 12 cm
B) 15 cm
C) 18 cm
D) 25,5 cm

6. Una piscina está llena hasta los $\frac{3}{5}$ de su capacidad. Si le faltan 1.200 litros para llenarla, ¿cuál es su capacidad?

A) 480 litros
B) 800 litros
C) 2.000 litros
D) 3.000 litros

7. Si se divide el sucesor del doble de un número con el antecesor del número resulta 3, entonces ¿cuál es el sucesor del cuadrado del número?

A) 4
B) 5
C) 17
D) 26

8. Un número entero sumado con el doble de su antecesor da 28. ¿Cuál es el antecesor del número?

A) 9
B) 10
C) 11
D) 21

9. Se tienen tres números consecutivos tales que el central es x, entonces el enunciado, "la suma de los cuadrados de los dos menores restado con el doble del cuadrado del mayor es -43" se traduce en la expresión

A) $x^2 + (x + 1)^2 – (2(x + 2))^2 = -43$
B) $x^2 + (x + 1)^2 – 2(x + 2)^2 = -43$
C) $(x – 1)^2 + x^2 – (2(x + 1))^2 = -43$
D) $(x – 1)^2 + x^2 − 2(x + 1)^2 = -43$

10. Raúl compró 1,2 kg de pan más una bolsa de papel de $ 50, pagó con un billete de $ 1.000 y una moneda de $ 100, y recibió un vuelto de $ 30. Según la información dada, ¿cuánto cuesta un kilo de pan?

A) $\$\ 833,\overline{3}$
B) $\$\ 841,\overline{6}$
C) $ 850
D) $ 1.375

11. Si P = 4a + 3b, ¿en cuánto aumenta P si a y b aumentan en 2 y 5 unidades respectivamente?

A) En 7 unidades.
B) En 8 unidades.
C) En 15 unidades.
D) En 23 unidades.

12. Si un número se aumenta en 2 y a este resultado se le calcula el 20% es igual que el 30% de lo que resulta de restarle 2 al mismo número, ¿cuál es el 10% de este número?

A) 0,01
B) 0,1
C) 1
D) -0,2

13. En un triángulo el ángulo menor mide 26° menos que el del medio y 28° menos que el mayor. ¿Cuánto mide el mayor de los ángulos interiores?

A) 42°
B) 60°
C) 68°
D) 70°

14. En un jardín hay 31 flores entre calas, orquídeas y pensamientos. Siendo las orquídeas un tercio de los pensamientos y estos cuatro más que las calas. ¿Cuántos son los pensamientos?

A) 5
B) 7
C) 11
D) 15

15. Con un hilo de 64 cm se construye un rectángulo cuyo largo mide 4 cm más que el ancho. ¿Cuál es el área de este rectángulo?

A) 252 cm^2
B) 396 cm^2
C) 780 cm^2
D) 1.020 cm^2

16. Una madre reparte $12.000 entre sus dos hijos de modo que el mayor recibió $3.000 más que el doble de lo que recibió el otro, ¿cuánto recibió el menor?

A) $2.000
B) $3.000
C) $6.000
D) $9.000

17. Cuando uno de dos hermanos nació, el mayor tenía nueve años.
Si uno de ellos tiene un año más que el doble del otro, ¿cuánto suman sus edades?

A) 8
B) 17
C) 25
D) 34

18. Las edades de dos hermanos suman 40 años y uno tiene los $\frac{3}{5}$ de los que tiene el otro.

¿Cuál es la diferencia entre sus edades?

A) 10 años
B) 15 años
C) 20 años
D) 30 años

19. Hace "a" años las edades de dos hermanos sumaban "10 a". ¿Cuál será el promedio de sus edades en "a" años más?

A) 5,5a
B) 6a
C) 6,5a
D) 7a

20. Un matrimonio tiene tres hijos: el mayor y dos gemelos. El mayor tenía dos años cuando nacieron los gemelos y actualmente sus edades suman 14 años, ¿qué edad tienen los gemelos?

A) 2
B) 4
C) 5
D) 6

21. Un peluquero en tres días de trabajo recaudó \$180.000. En el segundo día atendió a dos clientes más que en el primer día y en el tercer día atendió 4 más que en el primer día. Si a cada uno de los clientes le cobró \$6.000 por el corte, ¿cuántos atendió el segundo día?

A) 8
B) 10
C) 12
D) 18

22. Si la arista de un cubo disminuye en 2 unidades, entonces su área disminuye en 312 unidades cuadradas. ¿Cuántas unidades mide la arista del cubo inicial?

A) 12
B) 13
C) 14
D) 16

23. La tarifa de una compañía de electricidad consiste en un costo fijo de \$c más \$n por cada kilowatt de consumo. En un cierto mes don Arturo recibió una cuenta por \$R, entonces el número de kilowatt de consumo que tuvo ese mes es

A) $\frac{n}{R - c}$

B) $n(R - c)$

C) $\frac{R + c}{n}$

D) $\frac{R - c}{n}$

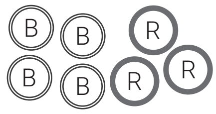
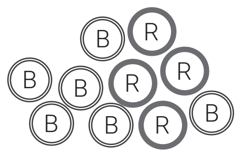
24. Alejandra, Luis y Antonio son tres primos cuyas edades actuales y las que tenían hace cuatro años (medidas en años) se muestran en la siguiente tabla:

	Edades actuales	Edades hace 4 años
Antonio	a	
Luis		b + 10
Alejandra	a – b	

Si la suma de las edades actuales es 30 años y hace cuatro años Alejandra tenía un año, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La edad actual de Alejandra es 5 años.
B) Antonio tiene más de 8 años.
C) Luis tiene 9 años más que Antonio.
D) Luis hace 7 años tenía 10 años.

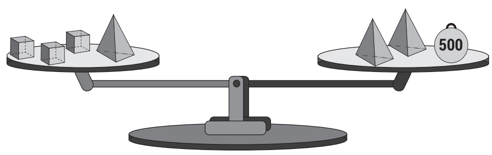
25. Ernesto juega a la ruleta en el casino y en ella se juegan con fichas de colores blanco y rojo (En la figura, B y R respectivamente).
En dos ocasiones que asistió al casino canjeó las fichas que le sobraron y obtuvo el dinero que se indica a continuación:

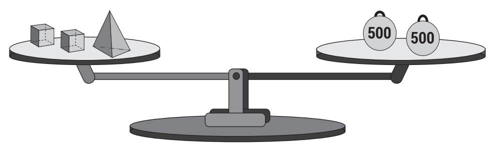
FICHAS DE CANJE	MONTO RECIBIDO
	$21.500
	$32.000

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) 10 fichas rojas equivalen a una blanca.
B) La diferencia positiva entre los valores de las fichas de cada color es $4.500.
C) El valor de una roja equivale a un 10% de lo que vale una blanca.
D) Cuatro fichas blancas y una roja valdrían más de $21.000.

26. Las siguientes balanzas se encuentran en equilibrio. Si las masas que aparecen están en gramos, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?





A) Cada pirámide tiene una masa de 100 gramos más que la de un cubo.
B) Tres cubos tienen una masa menor que 1 kg.
C) Ocho cubos estarían en equilibrio con seis pirámides.
D) Cinco cubos y dos pirámides tienen una masa inferior a dos kilos.

27. Eugenio quiere hacer una completada con sus amigos, para ello compra 5 kilos de tomates y tres kilos de paltas en $10.700. Al llegar a su casa, su madre le pregunta cuánto valían las paltas; pero él no lo recuerda, solo se acuerda que el kilo de paltas valía $1.700 más que el kilo de tomates. Para determinar cuánto valía el kilo de paltas, le pide a sus amigos Carlos y Sebastián que le ayuden a resolver el problema, entonces ellos efectúan los siguientes planteos:

Carlos:	Sebastián:
Paltas $x ; tomates $y el kilo	Paltas $(x + 1700) ; tomates $x el kilo
Sistema de ecuaciones: $\begin{array}{l} 5y + 3x = 10700 \\ y = x + 1700 \end{array}$	Ecuación: $5x + 3(x + 1700) = 10700$

¿Cuál de ellos planteó correctamente el problema?

A) Solo Carlos.
B) Solo Sebastián.
C) Ambos.
D) Ninguno.

28. Un taller mecánico vende aceite para autos en dos formatos, bidones de dos y cinco litros cada uno. En total en el taller hay 26 bidones y 100 litros de aceite. ¿Cuántos bidones de dos litros hay?

A) 8
B) 10
C) 12
D) 16

29. Felipe compra un ramo de flores que contenía 18 claveles y 6 rosas en $6.600. Si las rosas valen $100 más que los claveles, ¿cuánto vale cada una de las rosas?

A) $200
B) $250
C) $300
D) $350

30. Dos libros han costado \$13.000 y el doble del precio del más barato vale \$200 más de lo que cuesta el otro. ¿Cuál es la diferencia entre los precios de ambos libros?

A) \$2.200
B) \$4.200
C) \$4.400
D) \$8.600

31. Las edades de Pablo (P años) y su hijo Andrés (A años) son tales que Andrés tiene el 60% de lo que tiene su padre y hace veinte años era solo los $\frac{7}{15}$. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones permite resolver las edades de cada uno de ellos?

A) $\left.\begin{array}{l} A = \frac{60}{100}P \\ A - 20 = \frac{7}{15}P \end{array}\right|$

B) $\left.\begin{array}{l} P = \frac{60}{100}A \\ A - 20 = \frac{7}{15}(P-20) \end{array}\right|$

C) $\left.\begin{array}{l} A = \frac{60}{100}P \\ A - 20 = \frac{7}{15}(P - 20) \end{array}\right|$

D) $\left.\begin{array}{l} P = \frac{60}{100}A \\ P - 20 = \frac{7}{15}(A - 20) \end{array}\right|$

32. En un curso de Álgebra universitaria, la nota final se obtiene considerando que el promedio de pruebas es un 60% de la nota, el promedio de controles es un 10% y el examen el 30% restante. Francisco recuerda que la nota final que obtuvo en este curso fue un 4,1, en el examen obtuvo un 4,0 y en el promedio de controles obtuvo un punto más que en el promedio de pruebas. Según la información anterior, ¿cuál fue su promedio de controles?

A) 4,0
B) 4,8
C) 5,0
D) 6,0

33. Amanda está organizando la fiesta de cumpleaños de su hijo Camilo y ha decido invitar a todos sus compañeros de curso. Para la compra de las bebidas, nota que estas vienen en envases de 1,5 y 2,5 litros. Ella compra 29 litros y recuerda que compró dos botellas más de 2,5 que de 1,5 litros, pero no recuerda cuántas botellas compró de cada tipo, para ello le solicita a su hijo Francisco que le resuelva el problema. Para ayudar a resolver la duda de su madre, Francisco efectuó la siguiente resolución para el problema:

(1) **Planteo de incógnitas**
x: número de botellas de 1,5 L ; y: número de botellas de 2,5 L

(2) **Planteo de ecuaciones**

$$\begin{array}{l|} 1{,}5x + 2{,}5y = 29 \\ y = x + 2 \\ \hline \end{array}$$

(3) **Resolución del sistema de ecuaciones**
Reemplazó $y = x + 2$ en la primera ecuación: $1{,}5x + 2{,}5(x + 2) = 29$

Resolviendo, obtuvo $x = 6$, reemplazó en la segunda ecuación, concluyendo que $y = 8$.

(4) **Conclusión**
La madre compró 6 botellas de 2,5 L y 8 botellas de 1,5 L.

¿En cuál de los siguientes pasos, Francisco tuvo un error?

A) En el planteo de las incógnitas.
B) En el planteo de las ecuaciones.
C) En la resolución del sistema de ecuaciones.
D) En la conclusión.

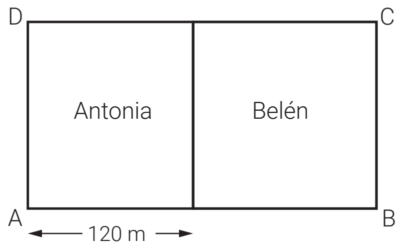
34. En una fiesta hay 12 mujeres más que hombres. Si se retiran 4 mujeres y 2 hombres, el número de hombres equivaldría a la mitad del número de mujeres. ¿Cuántos hombres había en un principio?

A) 10
B) 12
C) 14
D) 20

35. En un juego de tiro al blanco se asignan 100 puntos por cada acierto y se descuentan 50 por cada error. Si un jugador lanzó 30 veces obteniendo 1500 puntos ¿cuál fue el número de aciertos?

A) 10
B) 15
C) 20
D) 25

36. El rectángulo ABCD de la figura, representa una parcela que tiene Claudio el cual tiene un perímetro de 1040 metros; este sitio lo piensa subdividir en dos, para que sus hijas Antonia y Belén construyan en ellos. Belén solicita que al hacer la división su sitio tenga forma de cuadrado, si se accede a la petición de Belén, el frente del sitio de Antonia tendrá una longitud de 120 metros como se muestra en la figura:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El sitio de Belén tendrá más de un 60% del sitio de Claudio.
B) El frente del sitio de Belén será 200 metros.
C) El área del sitio de Antonia será de 24.000 m^2.
D) El sitio de Claudio tiene más de 80.000 m^2.

37. Doña Pepa lleva 3 kg de tomates y 2 de limones en $9.200. Si hubiese llevado 2 kg de tomates y 3 de limones le habría costado $100 más. ¿Cuánto vale cada kilo de limones?

A) $1.700
B) $1.800
C) $1.900
D) $2.100

38. Un cuadrado tiene 14 cm más de perímetro que un triángulo equilátero. Si la suma de los perímetros de ambas figuras es 26 cm, ¿cuál es el área del cuadrado?

A) 5 cm^2
B) 8 cm^2
C) 20 cm^2
D) 25 cm^2

39. Dos cajas pesan 102 kilos y si se sacan 7 kilos de una y se depositan en la otra, quedan iguales. ¿Cuántos kilos tiene la más pesada?

A) 44
B) 48
C) 58
D) 65

40. En una compra de útiles escolares, Pedro compra dos lápices de mina y cuatro de pasta en $1.800. Si el lápiz de pasta cuesta $150 más que el lápiz de mina, ¿qué valor tiene este último?

A) $200
B) $250
C) $350
D) $400

41. En un campeonato de fútbol, si un equipo gana un partido recibe 3 puntos y si empata gana 1 punto. Si en 6 partidos un equipo permanece invicto con 14 puntos, ¿cuántos partidos ha ganado?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

42. Las edades de Pedro y Luis están en la razón de 5 : 4 y hace tres años estaban en la razón 4 : 3. ¿Cuánto suman sus edades actuales?

A) 21 años
B) 24 años
C) 27 años.
D) 36 años.

5

43. Pedro tiene $A y su hermano Diego tiene $B. Si Pedro le da $200 a Diego quedan ambos con igual cantidad de dinero y si el padre de ellos le hubiese dado $ 500 a Pedro y le hubiese quitado $100 a Diego, entonces Pedro quedaría con el doble de lo que tendría Diego.
¿Cuál de los siguientes sistemas permite determinar el dinero que tenían inicialmente?

A) $\begin{array}{l} A + 200 = B - 200 \\ 2(A + 500) = B - 100 \end{array}$

B) $\begin{array}{l} A - 200 = B + 200 \\ 2(A + 500) = B - 100 \end{array}$

C) $\begin{array}{l} A + 200 = B - 200 \\ A + 500 = 2(B - 100) \end{array}$

D) $\begin{array}{l} A - 200 = B + 200 \\ A + 500 = 2(B - 100) \end{array}$

44. Francisco tiene $p en a monedas de $50 y b monedas de $100.
Si el total de monedas son 10, ¿cuál de los siguientes sistemas permite determinar cuántas monedas tiene de cada denominación?

A) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ \frac{50}{a} + \frac{100}{b} = p \end{array}$

B) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ 100a + 50b = p \end{array}$

C) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ \frac{a}{50} + \frac{b}{100} = p \end{array}$

D) $\begin{array}{l} a + b = 10 \\ 50a + 100b = p \end{array}$

45. Un número sumado con la mitad de la edad de Pablo da 40. Si se suman las edades de Pablo con la de su hermano Joaquín resultan 20 años y si se suma la edad de Pablo con el doble de la edad de Joaquín resulta 28 años, ¿cuál es el número?

A) 8
B) 12
C) 34
D) 68

46. A continuación se muestra una tabla de valores de dos variables que están en proporcionalidad directa:

x	y
15	18
a	b
b – 1	a + 12

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $a + b = 66$
B) $b - a = 6$
C) $ab = 270$
D) $6a = 5b$

47. Juan va a comprar bebidas y papas fritas, para ello lleva $ 3600.
Si comprara 3 latas de bebida y 2 bolsas de papas le faltarían $ 100 y si comprara 2 latas de bebida y 3 bolsas de papas, le sobrarian $ 50. ¿Cuánto vuelto recibiría, si compra una bolsa de papas y una lata de bebida?

A) $1.450
B) $2.150
C) $2.250
D) $2.350

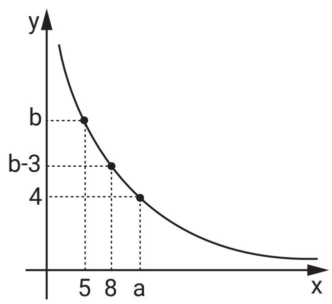
48. En un cine la entrada normal vale $600 más que la de estudiantes.
A una función asisten 50 personas de las cuales 10 cancelaron entrada de estudiantes, recaudándose $114.000, ¿cuánto valía la entrada para estudiantes?

A) $1.400
B) $1.800
C) $2.000
D) $2.400

49. Una empresa encargada de los equipos de aire acondicionado de una oficina, tiene una tarifa que consiste en un costo fijo más un cierto monto por cada visita que realice al mes. Se sabe que en un mes que hubo 5 visitas el cobro fue \$120.000 y al otro mes que hubo solo 3 visitas el cobro fue de \$90.000, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

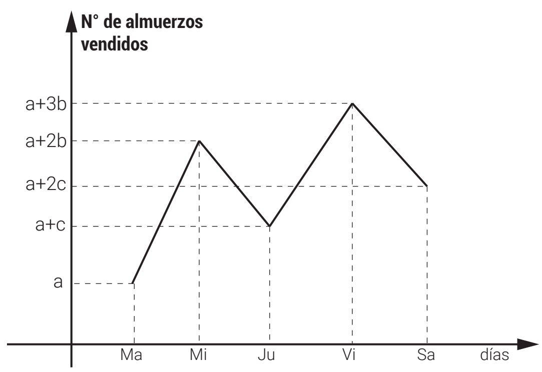
A) El valor de cada visita es \$15.000.
B) El costo fijo equivale al valor de tres visitas.
C) Por 2 visitas cobrarían \$75.000.
D) La tarifa y el número de visitas son variables directamente proporcionales.

50. El gráfico muestra la relación entre dos variables que están en proporcionalidad inversa. Según los datos dados, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) $5b = 4a$
B) $a > b$
C) $ab = 80$
D) La constante de proporcionalidad es 80.

51. En la siguiente gráfica se muestran las ventas de almuerzos en un restaurante por día. Se sabe que los días martes y miércoles se vendieron en total 66 almuerzos, el miércoles y viernes se vendieron en total 120 y el viernes y sábado se vendieron en total 104.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) El jueves se vendieron 15 almuerzos.
B) El sábado se vendieron más de 50 almuerzos.
C) La mayor venta fue de 69 almuerzos.
D) Siempre la venta diaria fue superior a 20 almuerzos.

52. Un número tiene dos cifras donde la cifra de las unidades es p y la de las decenas es b. Si la suma de las cifras es 5 y si al número se le suma 9 resulta el número con las cifras invertidas, ¿cuál de los siguientes sistemas permite determinar las cifras del número?

A) $\left.\begin{array}{l} 10b + p + 9 = 10b + p \\ 10b + p = 5 \end{array}\right|$

B) $\left.\begin{array}{l} b + p + 9 = p + b \\ b + p = 5 \end{array}\right|$

C) $\left.\begin{array}{l} 10p + b + 9 = 10b + p \\ b + p = 5 \end{array}\right|$

D) $\left.\begin{array}{l} 10b + p + 9 = 10p + b \\ b + p = 5 \end{array}\right|$

53. Si a un número que tiene dos cifras se le resta la suma de sus cifras resulta 54 y si al número se le resta el que resulta al invertir sus cifras resulta 27. ¿Cuál el doble del número?

A) 12
B) 18
C) 63
D) 126

54. x cuadernos de un mismo tipo valen $p, si comprara dos más le harían un descuento de un 5%, en este caso ¿cuánto hubiese pagado?

A) $\frac{(x+2)p}{x} - \frac{5}{100}$

B) $(0{,}95) \cdot \frac{(x+2)p}{x}$

C) $(0{,}05) \cdot \frac{(x+2)p}{x}$

D) $(0{,}95) \cdot \frac{xp}{x+2}$

5

55. Juan quiere instalar una enciclopedia en una biblioteca cuyos compartimientos son de igual tamaño. Al ponerla en los compartimientos se da cuenta que si coloca cuatro tomos en cada compartimiento le sobraría un tomo y si los pone de a cinco todos los compartimientos quedan llenos excepto el último que queda vacío. ¿Cuántos compartimientos tiene la biblioteca?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 8

56. En un curso, la razón entre el número de hombres y el número de mujeres es 5 : 3 y si se retiran 4 hombres y se agregan tres mujeres, la razón es 7 : 6. ¿Qué diferencia había inicialmente entre hombres y mujeres?

A) 3
B) 5
C) 10
D) 20

57. Un vaso está lleno de agua, si se bota el 20% de su contenido, el vaso con el agua tendrían una masa de 320 gramos y si se hubiese botado un tercio de su contenido, habrían tenido una masa de 300 gramos. ¿Cuál es la masa del vaso?

A) 150 gramos
B) 160 gramos
C) 180 gramos
D) 200 gramos

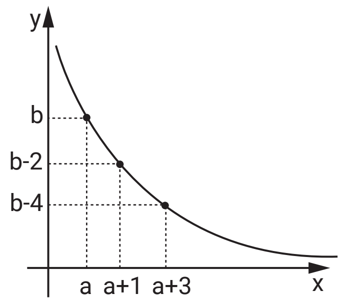
58. Patricia debe optar entre dos planes de telefonía, el plan “Prime” tiene un costo de fijo de $1200 más $5 por minuto hablado, mientras que el plan “Familiar” tiene un costo fijo de $2.500 con lo que puedes hablar hasta 500 minutos; después que pases esta cantidad te cobran $15 por cada minuto. Si el consumo de Patricia es superior a los 500 minutos, ¿a los cuántos minutos las tarifas de ambos planes serán iguales?

A) 586
B) 620
C) 720
D) No existe tal valor.

59. El largo de un rectángulo se disminuye en 10 cm y el ancho aumenta en 10 cm, obteniéndose un rectángulo que tiene 50 cm^2 más que el original. ¿Cuál es la diferencia en cm, entre los lados distintos del rectángulo original?

A) 5
B) 10
C) 15
D) Falta información para determinarlo.

60. El gráfico de la figura corresponde al de dos variables que son inversamente proporcionales:

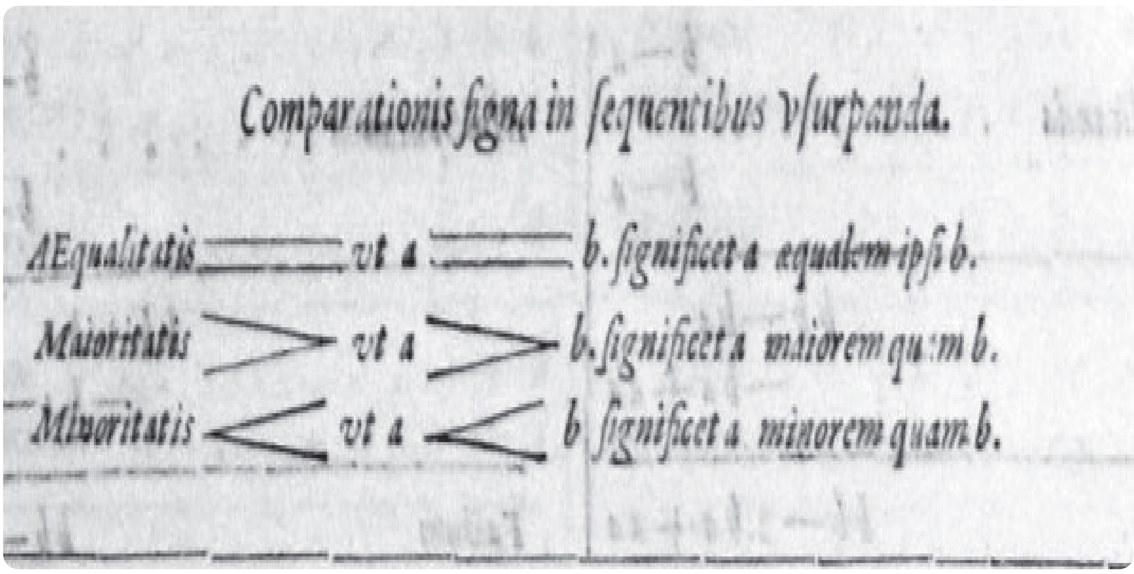


Según la información dada, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

A) 12
B) 24
C) 36
D) Falta información para determinarlo.

Capítulo 6

DESIGUALDADES E INECUACIONES


Comparationis ſigna in ſequentibus vſurpanda.

AEqualitatis ═══ vt a ═══ b. ſignificet a æqualem ipſi b.

Maioritatis > vt a > b. ſignificet a maiorem quam b.

Minoritatis < vt a < b ſignificet a minorem quam b.

El primer matemático que introdujo los símbolos de desigualdad “>” (mayor que) y “<” (menor que) fue **Thomas Harriot** (1520-1621) en su manuscrito "Artis analyticae praxis", el cual fue publicado después de su muerte. Los símbolos que aparecieron en la publicación se muestran en la figura, pero se cree que los editores modernizaron los símbolos originales ya que estos eran curvos parecidos a cuernos.

CONCEPTOS CLAVES

- **Desigualdades**
- **Gráfico**
- **Intervalos**
- **Inecuaciones de primer grado**

DESIGUALDADES

Una desigualdad es una expresión que utiliza los símbolos ">" (mayor), "<" (menor), "≥" mayor o igual o "≤" menor o igual.
Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

1. Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right| \rightarrow a + c < b + d \qquad \left.\begin{array}{l} a \le b \\ c < d \end{array}\right| \rightarrow a + c < b + d$$

2. Si se suma o resta un número a ambos lados de una desigualdad, esta se conserva.

$$a < b \rightarrow a + c < b + c \quad ; \quad a \le b \rightarrow a - c \le b - c$$

3. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número positivo, esta se conserva.

$$a < b \text{ y } c > 0 \rightarrow ac < bc \quad ; \quad a \le b \text{ y } c > 0 \rightarrow ac \le bc$$

4. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número negativo, esta se invierte.

$$a < b \text{ y } c < 0 \rightarrow ac > bc \quad ; \quad a \le b \text{ y } c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$$

PROPIEDADES CON DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES

En los números reales se cumplen las siguientes propiedades relativas a desigualdades:

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos, entonces sus cuadrados mantienen la desigualdad:
  $0 < a < b \rightarrow a^2 < b^2$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos negativos, entonces sus cuadrados invierten la desigualdad:
  $a < b < 0 \rightarrow a^2 > b^2$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos o ambos negativos, entonces sus recíprocos invierten la desigualdad:
  $0 < a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $a < b < 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

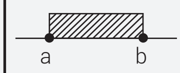
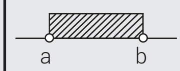
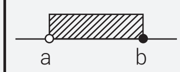
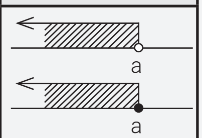
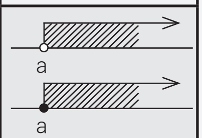
- Si se tiene un número entre cero y uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez menor:
  $0 < a < 1 \rightarrow \ldots a^4 < a^3 < a^2 < a$

- Si se tiene un número mayor uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez mayor:
  $a > 1 \rightarrow \ldots a^4 > a^3 > a^2 > a$

- La suma de los cuadrados de dos números es mayor o igual que el doble del producto de los números:
  $a^2 + b^2 \ge 2ab$

INTERVALOS DE NÚMEROS REALES

Un intervalo es un subconjunto de números reales, existen diversos tipos de intervalos, los cuales pasamos a detallar a continuación:

Tipo de Intervalo	**Descripción**	**Notación Conjuntista**	**Notación de Intervalo**	**Gráfico**
Cerrado	Considera todos los números reales que están entre dos números, considerando los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
Abierto	Considera todos los números reales que están entre dos números, sin considerar los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$	$]a, b[$	
Intervalo semi abierto por la izquierda (o semi cerrado por la derecha)	Considera todos los números reales que están entre dos números, sin considerar el extremo izquierdo.	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$	$]a, b]$	
Intervalo semi abierto por la derecha (o semi cerrado por la izquierda)	Considera todos los números reales que están entre dos números, sin considerar el extremo derecho.	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$	$[a, b[$	
Intervalo no acotado por la izquierda	Considera todos los números reales que son menores (o menores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$ $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$	$]-\infty, a[$ $]-\infty, a]$	
Intervalo no acotado por la derecha	Considera todos los números reales que son mayores (o mayores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$ $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$	$]a, \infty[$ $[a, \infty[$	

TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO CON DESIGUALDADES A EXPRESIÓN ALGEBRAICA

A continuación veremos cómo plantear algunos enunciados relacionados con desigualdades:

Enunciado	**Expresión algebraica**
A mayor que B	$A > B$
A menor que B	$A < B$
A mayor o igual que B	$A \geq B$
A menor o igual que B	$A \leq B$
A es a lo sumo igual a B	$A \leq B$
A es a lo menos B	$A \geq B$
A es a lo más B	$A \leq B$

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación lineal con una incógnita es una desigualdad donde el mayor exponente de la incógnita es uno. Ejemplos de inecuaciones lineales: $ax + b < c$; $ax + b \geq c$, donde x es la incógnita y a, b y c son números reales. Para resolver las inecuaciones lineales debemos ocupar las propiedades de las desigualdades.

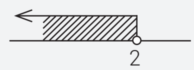
Ejemplo:

Resolver la inecuación $12x + 8 < 32$

(1) Restamos 8 ambos lados de la inecuación (por prop. 2 la desigualdad no cambia)
$12x < 24$

(2) Dividimos por 12 a ambos lados de la inecuación (por prop. 3 la desigualdad no cambia)
$x < 2$

Este resultado lo podemos anotar mediante un conjunto un intervalo o forma gráfica.

Conjunto	Intervalo	Gráfico
$\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < 2 \}$	$]-\infty, 2[$	

Observación: en el caso en el que en la inecuación se elimine la incógnita, tenemos dos posibilidades:

(1) Si la inecuación conduce a una contradicción, entonces no tiene soluciones.

Ejemplo: $2x - 3 < 2x - 5 \ \leftrightarrow \ -3 < -5 \ \leftrightarrow \ S = \emptyset$

(2) Si la inecuación conduce a una afirmación que es siempre verdadera, entonces tiene infinitas soluciones.

Ejemplo: $4 - (x + 1) > 2 - x \ \leftrightarrow \ 3 - x > 2 - x \leftrightarrow \ 3 > 2 \ \leftrightarrow \ S = \emptyset$

ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:

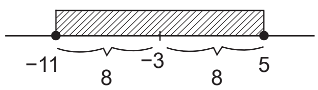
- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS RESUELTOS

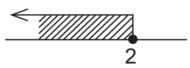
1. Los números que están a una distancia a los sumo igual a 8 del −3 y no son mayores que 2, corresponde al intervalo

Solución

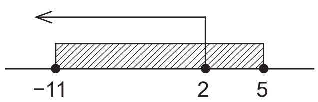
Los números que “están a una distancia a los sumo igual a 8 del −3” corresponde al intervalo:



Por otro lado los que “ no son mayores que 2” corresponde al intervalo:



Intersectando los dos intervalos obtenidos:



Se obtiene el intervalo [−11, 2].

2. Un servicio de taxis cobra una tarifa inicial de $1500 (llamada “bajada de bandera”) más $130 por cada 200 metros de recorrido (lo que se va cobrando cuando finaliza los 200 m).

Si un cliente tiene $3.000, ¿para cuántos km de recorrido le alcanza?

Solución:

Tenemos que la tarifa es $1500 + 130x$ donde x es la cantidad de tramos de 200 metros que haya recorrido, entonces planteamos la inecuación $1500 + 130x \leq 3000$, cuya solución es $x \leq 11{,}53...$, es decir los $3.000 le alcanzará para un recorrido a lo sumo igual a 11 tramos de 200 metros, si transformamos esto a kilómetros, calculamos $\frac{11 \cdot 200}{1000}$ lo que nos arroja 2,2 km.

Por lo tanto, con $3.000 le alcanza para un recorrido a lo sumo igual a 2,2 km.

3. Una mamá debe comprar cuadernos universitarios, estos pueden ser tapa blanda o tapa dura cuyos valores respectivos son \$800 y \$1200.
Si la cantidad de cuadernos de tapa dura deben ser 5 más que los de tapa blanda y su gasto no debe exceder los \$35.000, ¿cuál es la mayor cantidad posible de cuadernos de tapa dura que puede comprar?

Solución:
Supongamos que compra "x" cuadernos de tapa blanda, por lo tanto debe comprar "x + 5" de tapa dura.
El gasto es entonces $1200(x + 5) + 800x$, el cual no debe exceder los \$35.000, por lo que el enunciado del problema nos conduce a la inecuación $1200(x + 5) + 800x \leq 35000$, dividiendo por 100, obtenemos la inecuación equivalente $12(x + 5) + 8x \leq 350$, resolviendo obtenemos que $x \leq 14{,}5$, por lo que el mayor valor posible para los cuadernos de tapa blanda es 14 y por ende el mayor valor posible para los de tapa dura es 19.

4. Si a y b son números reales negativos tal que $a > b$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $a^2 > ab$

B) $\frac{a}{b} > 1$

C) $\frac{a + b}{b} > 1$

D) $\frac{b - a}{a + b} > 1$

Solución:
En A) si dividimos por "a" a ambos lados de la desigualdad $a^2 > ab$, la desigualdad se invierte ya que $a < 0$, entonces nos queda $a < b$, lo que contradice la hipótesis, luego es falsa.

En B) si multiplicamos por b la desigualdad $\frac{a}{b} > 1$, se invierte la desigualdad debido a que $b < 0$, entonces queda $a < b$, lo cual contradice la hipótesis, luego la afirmación de esta alternativa es falsa.

En C) si multiplicamos la desigualdad $\frac{a + b}{b} > 1$ por b, obtenemos $a + b < b$ (se invierte la desigualdad debido a que $b < 0$), de $a + b < b$, obtenemos que $a < 0$, lo cual es correcto, luego lo que se afirma en esta alternativa es verdadero.

En D) si multiplicamos la desigualdad $\frac{b - a}{a + b} > 1$ por $a + b$, la desigualdad se invierte debido a que $a + b < 0$, luego se obtiene que $b - a < a + b$, o equivalentemente $-a < a$, esto no se cumple debido a que $a < 0$, luego es falsa.

Nota: el método utilizado en este ejercicio consiste en desarrollar la afirmación dada, convirtiéndola a otra expresión equivalente, si concluimos que esta es verdadera (o falsa) la original también será verdadera (o falsa).

6

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro
portal educativo

1. El conjunto de los números reales que están entre 12 y 15 (ambos valores incluidos) y que son mayores que 13 y a lo sumo 20, corresponde al intervalo

A) [12, 20]
B) [13, 15]
C)]13, 15]
D) [12, 20] - {13}

2. Dados los intervalos: A =]2, 4[y B = [3, 5[, entonces A∩B =

A) [3, 4[
B) [3, 4]
C)]3, 4[
D)]2, 5]

3. El conjunto solución de la inecuación x − 2x ≤ − x + 3 corresponde al conjunto

A) [1, ∞[
B)]− ∞, 0]
C) □
D) ∅

4. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $-\frac{1}{3} \in \left]-\frac{2}{5}, -\frac{1}{4}\right[$

B) $2{,}7 \in \left[\frac{131}{50}, \frac{68}{25}\right[$

C) $1{,}\overline{9} \in \left[2, \frac{11}{5}\right]$

D) $0{,}\overline{6} \in \left[\frac{13}{25}, \frac{3}{5}\right]$

5. La solución de la inecuación: $\frac{x}{2} + 2 > \frac{3}{4}x - 1$ es el conjunto de números reales "x" que cumplen con que

A) $x < 12$
B) $x > 12$
C) $x < 4$
D) $x < 6$

6. Sean los intervalos, A =]-5 , 4] y B =]1 , 10], ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $-\sqrt{17} \in A$

B) $\frac{1}{3} \in B$

C) $\sqrt{98} \in (A \cup B)$

D) $\sqrt{2} \in (A \cap B)$

7. Si $a - 1 > 5$ y $b + 2 > -6$, entonces $a + b$ es

A) mayor que -4.
B) mayor que 2.
C) mayor que -2.
D) menor que -2.

8. Almendra debe resolver la inecuación, $(x + 2)^2 - (x - 3)^2 > 8(2x - 1)$ los pasos que realiza son los siguientes:

$$(x+2)^2-(x-3)^2>8(2x-1)$$

Paso 1

$$(x^2+4x+4)-(x^2-6x+9)>8(2x-1)$$

Paso 2

$$10x-5>16x-8$$

Paso 3

$$-6x>-3$$

Paso 4

$$x>\frac{1}{2}$$

Al resolver la inecuación, ¿en cuál de los pasos cometió un error?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

9. Si x es un número real tal que $0 < x < 1$, entonces ¿cuál de las siguientes inecuaciones **NO** cumple x?

A) $x^2 < x$
B) $x^3 < x^2$
C) $x^5 > x^3$
D) $x^4 < x^2$

10. La fórmula de conversión de °C (grados Celcius) a °F (grados Fahrenheit) es $°F = \frac{9}{5}°C + 32$.
Si la temperatura de una solución es superior a los 104 °F, entonces todos los valores posibles para la temperatura (medida en °C) cumplen con que son

A) iguales a 40 °C.
B) superiores a 40 °C.
C) superiores a 75,5 ° C.
D) superiores a 219,2 °C.

11. Si a y b son números racionales tales que $ab < 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\frac{a}{b} < 0$
B) $\frac{a^4}{b^3} > 0$
C) $\frac{a^3}{b^3} < 0$
D) $a^3b < 0$

12. El intervalo que contiene a todas y solamente las soluciones de la inecuación
$3x + 2(x - (2x - 3)) > 2x - (3x - (x - 1))$ es

A) $[-7, \infty[$
B) $]-7, \infty[$
C) $\left]-\frac{7}{5}, \infty\right[$
D) $\left]-\frac{5}{3}, \infty\right[$

13. Manuel quiere dejar su vehículo en un estacionamiento cuya tarifa es de $500 base, que te permite estacionar hasta 30 minutos y después se recarga $20 por cada minuto adicional. Si Manuel dispone de $2.000 para el estacionamento entonces la cantidad máxima de tiempo que puede estacionar su vehículo es

A) 45 minutos.

B) 75 minutos.

C) 105 minutos.

D) 120 minutos.

14. ¿Cuál de los siguientes intervalos **no** contiene a ninguna de las soluciones de la inecuación $(x-2)^2-(x+1)^2 \geq 9$?

A) $]-3, -1[$

B) $[-1, 5]$

C) $]-4, -2[$

D) $]-1, 5[$

15. Si a y b son racionales tales que $a - b > a$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\frac{a-b}{a} > 1$

B) $b^2 > b$

C) $a + b < a$

D) $a - b > a + b$

16. Juan compra dos artículos donde uno vale 5 dólares más que el otro. Si su presupuesto para comprar los dos artículos no excede los 55 dólares, ¿cuál es el precio máximo que puede pagar por el artículo más caro?

A) 24 USD

B) 25 USD

C) 29 USD

D) 30 USD

17. "El doble del cuadrado de un número entero x es a lo sumo igual al sucesor del triple de x", se expresa mediante la desigualdad:

A) $2x^2 \leq 3(x+1)$

B) $2x^2 < 3(x+1)$

C) $2x^2 < 3x+1$

D) $2x^2 \leq 3x+1$

18. "El cuadrado de **a** sumado con el cuadrado del doble de **b** es a lo menos el triple del cuadrado de **c**, se expresa mediante la desigualdad"

A) $a^2 + (2b)^2 \geq (3c)^2$
B) $a^2 + (2b)^2 > 3c^2$
C) $a^2 + (2b)^2 \geq 3c^2$
D) $a^2 + 2b^2 \geq 3c^2$

19. En un rectángulo el largo mide 2 cm más que el ancho y su perímetro es a lo sumo 22 cm. Si los lados miden un número entero de cm, entonces la máxima área posible es

A) 23 cm^2
B) 24 cm^2
C) 35 cm^2
D) 48 cm^2

20. En un estanque hay 80 m^3 de agua y una bomba extrae 1,2 m^3 por hora. Para que queden menos de 26 m^3 en el estanque, se deben esperar por lo menos

A) 43 h
B) 44 h
C) 45 h
D) 46 h

21. Una cuerda que mide 30 cm es cortada en 2 trozos de modo que el cuadrado de la longitud de la más larga menos el cuadrado de la longitud de la otra es superior a los 60 cm^2, entonces todos los valores posibles para la longitud de la cuerda más larga cumple con que miden

A) menos de 16 cm.
B) más de 16 cm.
C) menos de 20 cm.
D) más de 20 cm.

22. ¿Cuántos números enteros positivos existen que cumplen con que su triple sumado con los tres cuartos de su sucesor es menor a 12?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

23. Leonor va a comprar chocolates y jugos en un supermercado para celebrar el cumpleaños de su hijo. Los chocolates valen \$350, los jugos \$500 y desea comprar 6 unidades más de jugos que de chocolates. Si su presupuesto es inferior a los \$15.000, entonces el máximo de jugos que puede comprar es

A) 13
B) 14
C) 19
D) 20

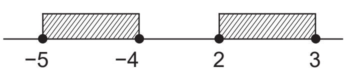
24. Lo que le falta a un número para ser 27 es mayor o igual de lo que le falta a su doble para ser 30, por lo tanto el número es necesariamente

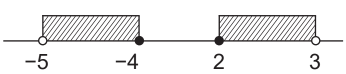
A) mayor que 19.
B) a lo menos 19.
C) a lo menos 57.
D) a lo menos 3.

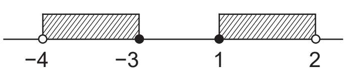
25. La suma de tres números consecutivos es a lo sumo 39, ¿cuál de las siguientes afirmaciones con respecto al mayor de los números es **siempre** verdadera?

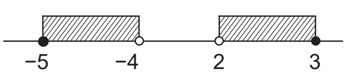
A) es a lo sumo 12.
B) es menor que 14.
C) es a lo sumo 14.
D) es menor que 13.

26. ¿En cuál de los siguientes gráficos se representa a todos los números reales que están a una distancia mayor que tres y menor o igual que 4 del −1?

A)


B)


C)


D)


27. Sean a y b dos números racionales tales que $a < 0 < b$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\frac{a-b}{a} > 1$

B) $\frac{a}{a-b} < 1$

C) $\frac{a}{b} < -1$

D) $\frac{1}{a} < \frac{1}{a-b}$

28. Con respecto a las soluciones de la inecuación, $3x - (x - 2(x + 2)) > 2x + 2(3 + (x - 2))$, se afirma que

A) son todos los números reales.

B) son mayores que 2.

C) son mayores que 0.

D) no existen.

29. Andrés recibe un bono y decide darle parte de este a sus tres hijos, al mayor le dio la mitad, al del medio la quinta parte y al menor un sexto. Si lo que le dio a sus hijos es mayor a \$130.000, entonces todos los valores posibles para el monto del bono, cumplen que son

A) superiores a \$30.000.

B) superiores a \$25.000.

C) superiores a \$75.000.

D) superiores a \$150.000.

30. Lo que le falta al doble de un número para ser 80 es superior a lo que falta al mismo número para ser 50, por lo tanto el número debe ser

A) superior a 30.
B) inferior a 30.
C) a lo más 30.
D) a lo menos 30.

31. Si $\frac{32^a}{8} > 8^a \cdot 2^{13}$, entonces a

A) mayor que 8.

B) mayor que 16.

C) menor que $-\frac{26}{3}$.

D) menor que -26.

32. Los lados de un rectángulo se aumentan en 2 cm lo que produce que su área aumente en más de 8 cm^2, entonces el perímetro del rectángulo inicial es

A) a lo menos 4 cm.
B) mayor a 2 cm.
C) mayor a 4 cm.
D) mayor a 8 cm.

33. Los lados de un triángulo ABC cumplen con que $\frac{3}{5} < AB < 2$, $1 < BC < \frac{5}{2}$ y $3 < AC < \frac{38}{10}$, entonces ¿cuál de las siguientes opciones podría corresponder al perímetro de este triángulo?

A) 4,0
B) 4,6
C) 4,7
D) 9,0

34. Los lados de un triángulo ABC (expresados en cm) miden $a = x$, $b = 2x - 3$ y $c = x + 5$, con $x > 2$, entonces para que exista este triángulo, x debe medir

A) más de dos cm.
B) más de tres cm.
C) más de cuatro cm.
D) menos de cuatro cm.

35. En una función teatral hay entradas a platea VIP que valen \$10.000 y a platea normal que valen \$5.000. Un grupo de amigos asiste a esta función y al comprarlas les informan que quedan 4 entradas VIP más que normales. Si se dispone de menos de \$90.000 para la compra de las entradas, entonces el máximo de entradas VIP que pueden comprar es

A) 3
B) 5
C) 7
D) 8

36. La mamá de Alberto le celebrará su cumpleaños, para ello compra P botellas de 2 litros y Q botellas de 2,5 litros de bebida. Si durante el cumpleaños piensa servir vasos de 250 cc, dejando para ella una cantidad de bebida no inferior a R cc, entonces la inecuación que permite calcular la cantidad x de vasos que alcanzará a servir es

A) $2P + 2{,}5Q - \frac{1}{4}x > \frac{R}{1000}$

B) $2P + 2{,}5Q - \frac{1}{4}x \geq \frac{R}{100}$

C) $2P + 2{,}5Q - \frac{1}{4}x \geq \frac{R}{1000}$

D) $2P + 2{,}5Q - \frac{1}{4}x < \frac{R}{1000}$

37. Sean a y b dos números racionales negativos, tal que a > b, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $-a + b < a - b$

B) $(a - b)^3 > 0$

C) $\frac{a + b}{a - b} < 0$

D) $(b - a)^2 > a - b$

38. En una empresa eléctrica la tarifa consiste en un cargo fijo de $2.100 más $80 por cada kWh de consumo. Si en una familia desean gastar menos de $10.000 en electricidad, entonces la cantidad máxima de kWh que pueden consumir (en números enteros) es

A) 97

B) 98

C) 99

D) 100

39. La profesora de matemática le pide a cuatro de sus estudiantes que digan alguna información que les permita deducir que b < 0.

- **Raúl** dice que basta conocer que $-b > b$.
- **Pablo** dice que es suficiente conocer que $-b^2 < b^2$.
- **Sylvia** dice que basta conocer que $a^2b < 0$.
- **Paula** dice que es suficiente conocer que $b^3 < 0$.

¿Cuál de los estudiantes se equivoca?

A) Raúl
B) Pablo
C) Sylvia
D) Paula

40. En un estanque hay B m^3 de agua y una bomba le extrae A m^3 por hora, para que queden menos de C m^3 en el estanque, entonces hay que esperar

A) más de $\frac{B + C}{A}$ horas.

B) menos de $\frac{B - C}{A}$ horas.

C) más de $\frac{B - C}{A}$ horas.

D) exactamente $\frac{B - C}{A}$ horas.

41. Pablo hará un viaje fuera del pais y necesita comprar dólares y euros, para ello acude a una casa de cambio donde el precio de venta para los dólares y euros es $840 y $950 respectivamente. Si Pablo debe comprar de modo que el número de euros sea un 80% de la cantidad de dolares y debe gastar menos de $360.000, entonces la cantidad máxima de dólares (en números enteros) que puede comprar es

A) 222
B) 223
C) 224
D) 225

42. Una compañía de seguros cobra mensualmente por un vehículo de cierta marca y modelo un cargo fijo de $13.000 más un cobro de $20 por cada km recorrido. Si Joaquín tiene un presupuesto de a lo menos $18.000 e inferior a $20.000, entonces la cantidad de km mensuales que puede recorrer respetando su presupuesto debe

A) estar entre los 250 y los 350 km.
B) ser superior a los 250 km y a lo más 350 km.
C) ser a lo menos 250 km y a lo más 350 km.
D) ser como mínimo 250 km e inferior a 350 km.

43. Tres números consecutivos son tales que la suma entre los dos tercios del menor con los tres cuartos del intermedio es más grande que el término mayor. ¿Cuál es el menor valor posible para el término mayor?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7

44. Josefina ha ahorrado 28 monedas entre monedas de \$100 y \$500, ¿cuántas monedas de \$500 debe tener como mínimo, si se sabe que tiene un ahorro superior a \$9.200?

A) 14
B) 15
C) 16
D) 17

45. La temperatura en un cierto laboratorio está regulada de modo que es mayor a 5°C y a lo más llega a 20°C. Si la conversión entre grados Celcius a Fahrenheit es $°F = \frac{9}{5}°C + 32°$, entonces se puede afirmar que la temperatura de la habitación

A) fluctúa entre los 41 °F y 68 °F, sin tomar los extremos.
B) es superior a los 41 °F y a lo más llega a los 68 °F.
C) es a lo menos 41 °F y a lo más se llega a los 68 °F.
D) es a lo menos 41 °F y menor a los 68 °F.

46. Una compañía de agua potable tiene una tarifa base de \$R y un cobro de \$A por m^3 de consumo. En la casa de la Sra. Francia, durante el año pasado la cuenta más baja fue de \$P y la más alta fue de \$Q más, entonces ¿cuál de las siguientes relaciones cumplen todos los valores posibles de m, donde m es la cantidad de m^3 de consumo de agua potable de la vivienda de la Sra. Francia durante ese año?

A) $\frac{P-R}{A} < m < \frac{Q-R}{A}$
B) $\frac{P-R}{A} \leq m \leq \frac{Q-R}{A}$
C) $\frac{P-R}{A} \leq m \leq \frac{P+Q-R}{A}$
D) $\frac{P-R}{A} < m < \frac{P+Q-R}{A}$

47. Un camión transporta cervezas las cuales están embaladas en pack de 6 y de 24 unidades. Si en un viaje transporta más de 400 cervezas, llevando 6 pack más de 24 unidades que de 6, entonces el número de pack de 24 unidades que lleva es

A) como mínimo 8.
B) como mínimo 9.
C) como mínimo 14.
D) como mínimo 15.

48. En una liquidación las blusas valen $5.000 y los pantalones $12.000.
Si Belén lleva 10 unidades más de pantalones que de blusas y su presupuesto es inferior a $256.000, ¿cuál es la cantidad máxima de blusas que puede llevar?

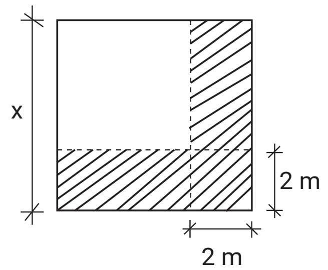
A) 7
B) 8
C) 9
D) 10

49. Para un evento artístico en un cierto teatro, el valor de la entrada de adulto es $12.000 y el de los estudiantes es $4.500. En un cierto día los que pagaron adultos fueron uno más que el doble que los que pagaron estudiante y la recaudación fue inferior a $400.000, entonces la cantidad de personas que cancelaron "estudiante" fue a lo más

A) 12
B) 13
C) 14
D) 15

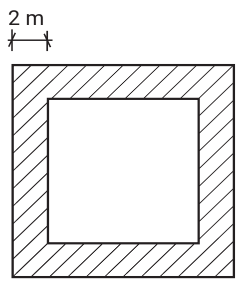
50. En la figura se muestra un sitio de forma de cuadrado, cuyo lado mide “x” metros. Paralelamente a los lados del sitio se trazan lineas a 2 metros, para demarcar la zona sombreada que se destinará a jardines. Si se sabe que el área destinada a jardines es superior a los 52 m^2, entonces el lado x mide

A) como mínimo 12 metros.
B) a lo menos 12 metros.
C) como mínimo 14 metros.
D) más de 14 metros.



51. En un patio de forma de cuadrado se ha colocado una piscina y alrededor de ella una franja constante de césped de 2 metros de ancho tal como se muestra en la figura. Si se sabe que el área destinada al césped es a lo menos 40 m^2, entonces si ponemos una reja alrededor tanto de la piscina como del patio, esta medirá a lo mínimo

A) 28 m
B) 40 m
C) 45 m
D) 48 m



6

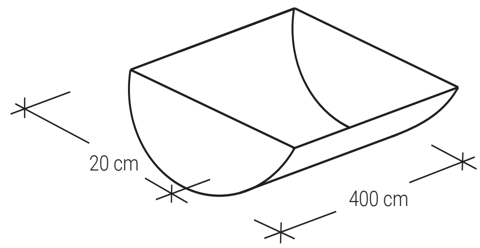
52. Un número está comprendido entre a y b, con a < b, si a este número se le resta un número negativo c y después se multiplica por un número negativo d, entonces el número obtenido es siempre mayor que

A) d(b + c)
B) d(b − c)
C) d(a + c)
D) d(a − c)

53. Un bebedero para pollos tiene forma de semicilindro como se muestra en la figura.
Si se abre una llave que bota 2,5 litros por minuto, ¿cuánto tiempo se demorá en llenar más de la mitad de la capacidad del estanque, suponiendo que habían inicialmente 20 litros? (ocupa que π es 3)

6

A) más de 4 minutos.
B) más de 16 minutos.
C) más de 24 minutos.
D) más de 232 minutos.

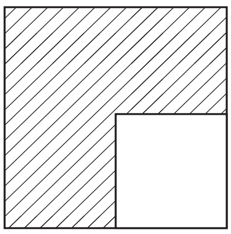


54. En el estacionamiento Autopark cobran $50 por cada minuto pero los primeros 30 minutos son gratis, mientras que la competencia, el estacionamiento Parktown cobran $40 el minuto. Para que sea más conveniente el estacionamiento Autopark, entonces se debe estacionar

A) más de 150'.
B) menos de 150'.
C) cualquier instante de tiempo, porque siempre es más conveniente.
D) exactamente 150'.

55. Jorge tiene un galpón cuya superficie tiene una base en forma de cuadrado, en él ha trazado el cuadrado blanco de la figura donde pondrá las oficinas y el resto (zona sombreada) lo ocupará en almacenaje. Si el lado del cuadrado de la zona para las oficinas tiene 8 metros menos que el lado del galpón y la zona de almacenamiento tiene un área superior a los 208 m^2, entonces el lado del galpón mide

A) a lo menos 9 m.
B) más de 9 m.
C) más de 17 m
D) más de 20 m.



56. Leonardo tiene una máquina para cortar el pasto la cual ocupa una mezcla de gasolina de 93 octanos con un aceite especial de motor, de modo que para cada corte, debe mezclar 10 cc de aceite por cada cuarto de litro de bencina. Si Leonardo dispone de un bidón de 20 litros de bencina y una botella de aceite de motor de $\frac{3}{4}$ L, entonces ¿cuántos cortes como máximo podrá hacer Leonardo?

A) 70
B) 75
C) 80
D) 85

57. Renata va a comprar a una liquidación 8 prendas entre pantalones y blusas. Los pantalones y las blusas cuestan respectivamente \$15.000 y \$12.000 y se sabe que ella gasta menos de \$111.000, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Podría comprar igual cantidad de pantalones que blusas.
B) El máximo de pantalones que puede comprar es 4.
C) Podría comprar más pantalones que blusas.
D) Podría comprar más blusas que pantalones.

58. En un rectángulo el ancho mide $(6x + 8)$ cm y el largo mide $(16 + 2x)$ cm, con $x > 0$, entonces el perímetro en cm, es un valor que es **siempre**

A) inferior a 20 cm.
B) inferior a 40 cm.
C) inferior a 60 cm.
D) inferior a 80 cm.

59. Un compuesto A que está inicialmente a 80° se coloca en una cámara de enfriamiento por lo que su temperatura empieza a disminuir en 1,2 °C por minuto, simultáneamente un compuesto B que se encuentra inicialmente a 66,5 °C se saca de la cámara de enfriamiento lo que provoca que su temperatura aumente en 1,5 °C por minuto. Si se mide el tiempo, a partir del instante en que efectuamos ambos procedimientos, entonces la temperatura del compuesto A va a ser superior a la del compuesto B:

A) En cualquier instante de tiempo.
B) Para un tiempo superior a los 5 minutos.
C) Para un tiempo inferior a los 5 minutos.
D) Exactamente a los 5 minutos.

60. Juan quiere estacionar su auto, para ello dispone de dos estacionamientos, en "Autoparque" cobran $300 los primeros 40 minutos y después $40 por cada minuto adicional, mientras que en el estacionamiento "Parking Center" cobran $450 los primeros 30 minutos y después $30 por cada minuto adicional, ¿hasta los cuántos minutos es más conveniente Autoparque?

A) Menos de 65 minutos.
B) Más de 80 minutos.
C) Menos de 75 minutos.
D) Menos de 85 minutos

Capítulo 7

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Bhaskara (1114-1185) también conocido como **Bhaskara II o Bhaskaracharya** ("Bhaskara el maestro") es quizás el matemático indio más conocido de la antigüedad.

Bhaskara representa la cima del desarrollo matemático del siglo XII, alcanza un gran conocimiento en los sistemas de numeración y resolución de ecuaciones entre ellas la famosa resolvente de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, tema que veremos en el presente capítulo.

CONCEPTOS CLAVES

- **Ecuación cuadrática**
- **Resolución mediante factorización y fórmula**
- **Naturaleza de las soluciones**
- **Aplicaciones a la resolución de problemas**

RESOLUCIÓN DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.
Para resolver una ecuación de este tipo, existen diversos métodos, entre los más importantes, tenemos:

- Factorización
- Completación de cuadrados
- Uso de fórmula general

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$
Esta ecuación se puede resolver fácilmente, si factorizamos el trinomio $x^2 - 10x + 24$, para ello determinamos dos números que sumen -10 y multipliquen 24, estos son -4 y -6, luego la factorización del trinomio es $(x - 4)(x - 6)$, entonces la ecuación queda $(x - 4)(x - 6) = 0$.
Como el producto es cero uno de los factores debe ser cero, por lo tanto $x - 4 = 0$ o $x - 6 = 0$, de donde se concluye que las soluciones son 4 o 6.

7

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x^2 - 8x - 20 = 0$
Esta ecuación la resolveremos mediante una completación de cuadrados.
Esta técnica consiste en formar un cuadrado de binomio, para ello procederemos de la siguiente forma:

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

Tomamos la mitad del coef. de x, y lo elevamos al cuadrado, en este caso $-8 : 2 = -4$, $(-4)^2 = 16$ por lo tanto formamos un 16 al lado izquierdo, para ello debemos sumar 36 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \quad /+36$$

$$x^2 - 8x + 16 = 36$$

El lado izquierdo corresponde al desarrollo del cuadrado de binomio $(x - 4)^2$, por lo que la ecuación queda:

$$(x - 4)^2 = 36$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados:

$$x - 4 = \pm\sqrt{36}$$

Por lo tanto, $x - 4 = 6$ o $x - 4 = -6$, luego las soluciones son $x = 10$ o $x = -2$.

(*) La formación del cuadrado de binomio explicado de esta forma resulta cuando el coeficiente de x^2 es uno, de no ser así debes dividir previamente la ecuación por este coeficiente.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 12 = 0$
Esta ecuación la resolveremos utilizando la fórmula general.
Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, podemos hallar sus soluciones, utilizando la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

En este ejemplo, $a = 2$, $b = 5$ y $c = -12$, entonces las soluciones son:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}, \text{ es decir } x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{3}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = -4$$

DETERMINACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA DADAS SUS SOLUCIONES

Supongamos que las soluciones de una ecuación cuadrática son x_1 y x_2, por lo visto en la técnica de factorización, la ecuación debe ser de la forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, desarrollando, obtenemos la ecuación:

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0}$$

Esta corresponde entonces a la ecuación cuadrática cuyas soluciones son x_1 y x_2.

NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES

Sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$,

las podemos hallar con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la cantidad subradical se denomina **discriminante** y se designa con la letra Δ.

Dependiendo del signo del discriminante, tenemos los siguientes casos:

Signo de Δ	Tipo de soluciones
Positivo	Reales y distintas
Cero	Reales e iguales
Negativo	No reales

(*) En el caso en que las soluciones no son reales, estas serán de la forma p + qi y p − qi con p y q numeros reales y $q \neq 0$, es decir serán complejas conjugadas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuál es la ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son los números reales $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$?

Solución:

Habíamos visto que si x_1 y x_2 son las soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación es: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, o bien $x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

En este caso, $x_1 + x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{(-1)^2 - (\sqrt{5}\,)^2}{4} = -1$, luego la ecuación es

$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0 \leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

2. Se sabe que una de las soluciones de la ecuación $6x^2 + kx - (k - 4) = 0$ es $x = \frac{1}{3}$, ¿cuál es la otra solución?

A) $-\frac{1}{2}$

B) $-\frac{3}{2}$

C) 7

D) -7

Solución:

Como $x = \frac{1}{3}$, reemplazamos este valor en la ecuación: $6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + k \cdot \frac{1}{3} - (k - 4) = 0 \leftrightarrow \frac{6}{9} + \frac{k}{3} - (k - 4) = 0 \leftrightarrow k = 7$,

reemplazando en la ecuación dada se obtiene: $6x^2 + 7x - 3 = 0$, resolviendo esta ecuación con la fórmula:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se obtiene $x = \frac{-7 \pm 11}{12}$, es decir $x = \frac{1}{3}$ o $x = -\frac{3}{2}$, luego la otra solución es $x = -\frac{3}{2}$,

alternativa B).

3. En un rectángulo el largo mide 5 cm menos que el triple del ancho. Si el ancho aumenta en 2 cm y el largo disminuye en 1 cm, la suma de las áreas de ambas figuras es 27 cm^2, ¿cuánto mide el ancho del primer rectángulo?

A) 3 cm

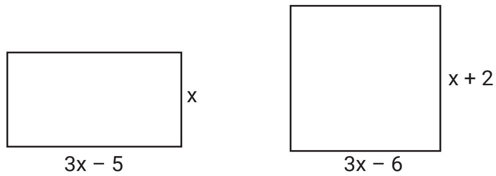
B) 4 cm

C) 5 cm

D) 12 cm

Solución:

Tenemos la siguiente situación:



Como la suma de las áreas es 27 cm², planteamos la ecuación:

$x(3x - 5) + (3x - 6)(x + 2) = 27$

$3x^2 - 5x + 3x^2 + 6x - 6x - 12 = 27$

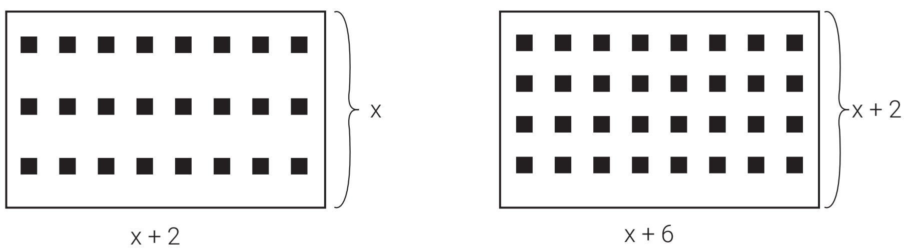
$6x^2 - 5x - 39 = 0$, resolviendo esta ecuación obtenemos $x = -\dfrac{13}{6}$ o $x = 3$, descartando el valor de x negativo, ya que es una distancia, obtenemos que el ancho del rectángulo original mide 3 cm, respuesta A).

4. En una sala de conferencias de una universidad, las butacas están ordenadas en filas, teniendo todas las filas igual cantidad de butacas, de modo que la cantidad de butacas por fila excede en 2 a la cantidad de filas. Debido a lo estrecho del recinto se construirá otra sala de conferencias la que tendrá 2 filas más y la cantidad de butacas por fila aumentarán en 4. Si la suma de las capacidades de ambas salas será de 312 personas, ¿cuántas butacas tenía por fila la primera sala de conferencias?

Solución:

Supongamos que en la primera sala de conferencias hay x filas , por lo que habrá (x + 2) butacas por fila, luego su capacidad es x(x + 2).

En la segunda sala, habrá (x + 2) filas y (x + 6) butacas por fila, luego su capacidad es (x + 2)(x + 6):



1ª Sala 2ª Sala

Por el enunciado, la suma de las capacidades de ambas salas es 312, luego $x(x + 2) + (x + 2)(x + 6) = 312$

$x^2 + 5x - 150 = 0$, las soluciones de esta ecuación son -15 y 10, descartamos la solución negativa, luego x =10.

Entonces el número de butacas por fila en la primera sala es 12.

ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:

- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. Las soluciones de la ecuación $2(x - 1)^2 = 5$ están representadas en

A) $1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

B) $1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

C) $-1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

D) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2. ¿En cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas, las soluciones son reales e iguales?

A) $x^2 - 4x = -1$
B) $2x^2 - 9 = 0$
C) $2x^2 + x = 1$
D) $4x^2 + 4x = -1$

3. ¿En cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas las soluciones son números racionales mayores que 1?

A) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
B) $x^2 - 2x - 8 = 0$
C) $x^2 - 7x + 10 = 0$
D) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas **NO** tiene como solución a $x = \frac{1}{2}$?

A) $4x^2 - 1 = 0$
B) $(2x - 1)^2 = 0$
C) $4x^2 + 4x - 3 = 0$
D) $6x^2 + x - 1 = 0$

5. Con respecto a las soluciones de la ecuación $x^2 + 4x - 32 = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Son racionales.
B) Una de ellas es positiva.
C) La suma es positiva.
D) Las dos son números enteros.

6. Si una de las soluciones de la ecuación en x, $3x^2 + 5kx + 2 = 0$ es -2, entonces k =

A) -1

B) 1

C) $\frac{7}{5}$

D) $-\frac{7}{5}$

7. Sea la ecuación cuadrática $3x^2 + kx - 5 = 0$, si una de las soluciones es -5, ¿cuál es la otra solución?

A) 14

B) 5

C) $-\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{3}$

8. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas tiene como soluciones números irracionales?

A) $3(2x - 1)^2 - 12 = 0$

B) $25(2x - 1)^2 - 9 = 0$

C) $-(2x + 3)^2 - 4 = 0$

D) $2(2x + 3)^2 - 4 = 0$

9. Arturo debe resolver la ecuación cuadrática, $4x^2+4x=35$, para ello realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} 4x^2+4x = 35 & \\ & \textbf{Paso 1} \\ 4x^2+4x+1 = 36 & \\ & \textbf{Paso 2} \\ (2x+1)^2 = 36 & \\ & \textbf{Paso 3} \\ 2x+1 = 6 \text{ o } 2x+1 = -6 & \\ & \textbf{Paso 4} \\ x = \frac{5}{2} \text{ o } x = -\frac{7}{2} & \end{array}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Cometió un error en el paso 1.

B) Cometió un error en el paso 2.

C) Cometió un error en el paso 3.

D) No cometió error.

10. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones **NO** tiene raíces reales?

A) $(x - 2)^2 + 4 = 0$
B) $(x + 3)^2 = 16$
C) $5(2x - 12)^2 = 0$
D) $2(5x - 4)^2 = 10$

11. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones que son reales e iguales?

A) $(x - 2)^2 + 4 = 0$
B) $(x + 3)^2 = -25$
C) $3(2x - 10)^2 = 0$
D) $3(5x - 4)^2 = 9$

12. Si x es la solución de la ecuación $-x = \frac{3}{x - 4}$, ¿cuál es el menor valor posible para la expresión: $\frac{3}{x - 4}$?

A) -4
B) -3
C) -1
D) 1

13. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como raíces (o soluciones) a $(2 + \sqrt{5})$ y $(2 - \sqrt{5})$?

A) $x^2 - 4x + 9 = 0$
B) $x^2 + 4x + 9 = 0$
C) $x^2 - 4x + 1 = 0$
D) $x^2 - 4x - 1 = 0$

14. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene raíces (o soluciones) a $(p + q)$ y $(p - q)$?

A) $x^2 + px + p^2 - q^2 = 0$
B) $x^2 - px + p^2 - q^2 = 0$
C) $x^2 + 2px + p^2 - q^2 = 0$
D) $x^2 - 2px + p^2 - q^2 = 0$

15. Con respecto a las soluciones de la ecuación $x + \frac{2}{x - 1} = 4$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Son reales de distinto signo.
B) Son racionales positivas.
C) No son reales.
D) Son racionales negativas.

16. En un rectángulo de área 32 cm^2, el ancho mide dos cm menos que el 75% del largo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones con respecto al rectángulo es **FALSA**?

A) Su perímetro es 24 cm.
B) El largo mide el doble del ancho.
C) El largo mide 4 cm más que el ancho.
D) La diagonal mide $\sqrt{68}$ cm.

17. Pablo y Arturo deben resolver la siguiente ecuación cuadrática: $(x-3)^2 = 2(x-3)$, el desarrollo de cada uno de ellos se muestra a continuación:

Pablo:

$(x-3)^2 = 2(x-3)$
$(x-3)^2 - 2(x-3) = 0$
$(x-3)((x-3)-2) = 0$
$(x-3)(x-5) = 0$

soluciones: $x = 3$ y $x = 5$

Arturo:

$(x-3)^2 = 2(x-3) \quad /:(x-3)$
$x-3 = 2$

solución: $x = 5$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Solo la resolución de Pablo está correcta.
B) Solo la resolución de Arturo está correcta.
C) Ambas están incorrectas.
D) Ambas están correctas.

18. Los lados de un cuadrado se disminuyen en 2 cm obteniéndose un segundo cuadrado. Si el doble del área del cuadrado menor se le suma el área del cuadrado mayor se obtienen 68 cm^2, entonces ¿cuál es el perímetro del cuadrado menor?

A) 4 cm
B) 6 cm
C) 16 cm
D) 24 cm

19. Se tienen tres múltiplos de tres consecutivos tales que el producto de los dos mayores es igual al doble del producto de los dos menores, ¿cuál es el menor valor posible para el menor de estos números?

A) -9
B) -6
C) -3
D) 6

7

20. Se tienen cuatro pares consecutivos tales que el cuadrado del menor disminuido en el tercero equivale al promedio entre el segundo y el cuarto. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Uno de ellos podría ser 0.
B) El mayor valor posible para uno de los términos es 10.
C) Uno de los términos podría ser -2.
D) Todos los términos son mayores que 2.

21. En un triángulo la base mide 3 cm más que la altura correspondiente y su área es 20 cm^2, ¿cuánto mide su altura?

A) 3 cm

B) 5 cm

C) 8 cm

D) $\frac{-3+\sqrt{89}}{2}$

22. En un trapecio se cumple que uno de los lados paralelos mide 2 cm más que el otro y la altura correspondiente a los lados paralelos mide 2 cm más que el mayor de los lados paralelos. Si el área del trapecio es 70 cm^2, ¿cuánto mide el menor de los lados paralelos?

A) 4 cm
B) 5 cm
C) 6 cm
D) 8 cm

23. Para construir un envase cilíndrico se necesitan 72π cm^2 de aluminio, sin considerar la tapa ni la base. Si la altura mide un cm más más que el doble del radio basal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El radio basal mide 4 cm.
B) La altura mide 9 cm.
C) La capacidad del envase es de 144π cm^3.
D) El área de la tapa es 32π cm^2.

24. Si $(2^a)^{a+1} = 4^{a+6}$, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera con respecto a las posibles soluciones para a?

A) Son dos números enteros positivos.
B) Son dos números enteros negativos.
C) Son dos números enteros de distinto signo.
D) No tiene soluciones reales.

7

25. A una circunferencia se aumenta su radio en 2 cm, si el doble del área del círculo menor sumada con el área del círculo mayor da 68π cm^2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El radio del círculo menor mide 4 cm.
B) El área del círculo mayor es 36π cm^2.
C) La diferencia entre las áreas es 4π cm^2.
D) La longitud de la circunferencia menor es 8π cm.

26. En un cono de área 96π cm^2, la generatriz mide 4 cm más que el radio basal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El radio basal mide 6 cm.
B) La generatriz mide 10 cm.
C) El volumen es 288π cm^3.
D) El área lateral es 60π cm^2.

27. En un cilindro la altura mide 2 cm más que el radio basal. Si el área es 80π cm^2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La altura mide 4 cm.
B) El área basal mide 16π cm^2.
C) El volumen es 96π cm^3.
D) El área lateral es 24π cm^2.

28. ¿Para qué valores de x la expresión $\dfrac{x-2}{2x^2+7x-4}$ no está definida?

A) Solo para $x = 2$.

B) Solo para $x = -4$.

C) Para $x = -4$ y $x = 2$.

D) Para $x = -4$ y $x = \dfrac{1}{2}$.

29. a, b y c son números reales positivos, con respecto a las soluciones de la ecuación en x, $a(x-b)^2 = c$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Una de las soluciones es $b - \sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

B) Su producto es $\left(b^2 - \dfrac{c}{a}\right)$.

C) Su suma es b.

D) Su diferencia positiva es $2 \cdot \sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

30. Juan desea resolver la ecuación de segundo grado $4x^2 + 12x = 27$, para ello sigue los siguientes pasos:

$$
\begin{aligned}
&4x^2 + 12x = 27 \quad /+9\\
&\qquad\Big\downarrow \ \textbf{Paso 1}\\
&4x^2 + 12x + 9 = 36\\
&\qquad\Big\downarrow \ \textbf{Paso 2}\\
&(2x + 3)^2 = 36\\
&\qquad\Big\downarrow \ \textbf{Paso 3}\\
&2x + 3 = 6\\
&\qquad\Big\downarrow \ \textbf{Paso 4}\\
&x = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

¿En cuál de los pasos anteriores cometió un error?

A) En el paso 1.
B) En el paso 2.
C) En el paso 3.
D) En el paso 4.

7

31. Dada la ecuación $x^2 + 10x - 15 = 0$, ¿qué número real p se debe sumar a ambos lados de la ecuación para completar el cuadrado de un binomio en el lado izquierdo de ella y cuáles son las soluciones de esta ecuación?

A) $p = 40$ y las soluciones son $(-5 - \sqrt{115})$ y $(-5 + \sqrt{115})$.
B) $p = -10$ y las soluciones son $(10 - \sqrt{5})$ y $(10 + \sqrt{5})$.
C) $p = 40$ y las soluciones son $(-5 - \sqrt{40})$ y $(-5 + \sqrt{40})$.
D) $p = 25$ y las soluciones no son reales.

32. p y q son números enteros distintos de cero, con respecto a las soluciones de la ecuación en x, $px^2 - qx = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Una de ellas es cero.
B) Ambas son racionales.
C) Ambas son reales y distintas.
D) Solo una de ellas es positiva.

33. p y q son números enteros distintos de cero, con respecto a las soluciones de la ecuación en x, $px^2 + q = 0$, ¿con cuál de las siguientes condiciones las raíces de esta ecuación **no** son reales?

A) $pq < 0$
B) $pq > 0$
C) $p + q > 0$
D) $p > q$

34. El área de un rectángulo es 50 cm^2 y su perímetro es 30 cm. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar su largo "x"?

A) $x^2 - 15x - 50 = 0$
B) $x^2 - 15x + 50 = 0$
C) $x^2 - 30x + 50 = 0$
D) $x^2 + 30x + 50 = 0$

35. Se tienen tres números consecutivos donde el menor es "x".
Si el doble del producto de los dos menores tiene 20 unidades más que el cuadrado del mayor, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el menor de los términos?

A) $2x(x + 1) + 20 = (x + 2)^2$
B) $2x(x + 1) - 20 = (x + 2)^2$
C) $2x(x + 1) = (20 + x + 2)^2$
D) $2x(x + 1) = 20 - (x + 2)^2$

36. El cuadrado de la edad que tiene actualmente Claudio sumada con el cuadrado de la edad que tendrá en tres años más da 269, ¿qué edad tendrá en 5 años más?

A) 5 años
B) 10 años
C) 15 años
D) 20 años.

37. La edad de un hermano es el doble de la edad del otro más cuatro años. Si el producto de sus edades es 160, ¿cuál es la edad del mayor?

A) 8 años
B) 10 años
C) 16 años
D) 20 años

38. Si x es un número real positivo tal que el x% de (x+2) es 3,6, entonces el 20% de x es

A) 3,6
B) 4
C) 18
D) 20

39. En un rectángulo, el largo mide 2 cm más que el ancho. Si los lados se aumentan en 2 cm, se forma un segundo rectángulo cuya área sumada con la del primero resulta 288 cm^2. ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo original?

A) 8 cm
B) 10 cm
C) 12 cm
D) 14 cm

40. En un rectángulo, el lado mayor mide 17 cm más que el otro y un cm menos que la diagonal, ¿cuál es el área de este rectángulo?

A) 24 cm^2
B) 31 cm^2
C) 84 cm^2
D) 168 cm^2

41. Para cercar un sitio rectángular por sus cuatro costados, se colocan postes cada un metro, en uno de los costados se pusieron p postes y en el otro 15 más. Si el área del sitio es 10.000 m^2, entonces la ecuación que permite calcular el número p de postes es

A) $p(p + 15) = 10000$
B) $(p + 2)(p + 17) = 10000$
C) $(p + 14)(p - 1) = 10000$
D) $(p + 13)(p - 2) = 10000$

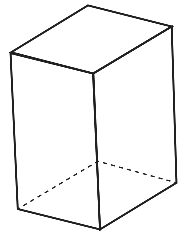
42. La distancia d(t) que recorre un vehículo yendo a una acelaración constante de a m/s^2, se modela con la expresión $d(t) = v_o t + \frac{1}{2}at^2$, siendo v_0 la rapidez inicial y t es el tiempo transcurrido en segundos.
Si su rapidez inicial es 5 m/s y su aceleración es 10 m/s^2, ¿a los cuántos segundos llevará recorrido una distancia de 100 m?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

43. Pedro, Antonio y Felipe son tres hermanos, tales que Antonio tiene dos años más que Pedro y Felipe tiene cuatro años más que Antonio. Si el producto de las edades de Antonio y Pedro se le suma el producto de las edades de Antonio y Felipe resulta 220, ¿qué edad tiene Antonio?

A) 6 años
B) 8 años
C) 10 años
D) 14 años

44. En el paralelepípedo recto de la figura, la base es un cuadrado y la altura mide 2 cm más que el lado del cuadrado. Si el área del paralelepípedo es 78 cm^2, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite resolver la longitud x (en cm) del lado del cuadrado?



A) $x^2(x + 2) = 78$
B) $2x^2 + 2x(x + 2) = 78$
C) $2x^2 + 4x(x + 2) = 78$
D) $x^2 + 4x(x + 2) = 78$

45. En una caja cuya forma es de paralelepípedo recto de base rectangular el largo mide 2 cm más que el ancho y la altura mide 4 cm. Si la cantidad de de papel que se ocuparían para forrar exteriormente esta caja sin considerar la tapa es 79 cm^2, ¿cuál de las siguientes alternativas **NO** corresponde al área de uno de los rectángulos que encierran esta caja?

A) 12 cm^2
B) 15 cm^2
C) 20 cm^2
D) 25 cm^2

7

46. Dos hermanos tienen 5 años de diferencia y en 10 años más el producto de sus edades será 750. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Uno de ellos tiene actualmente 15 años.
B) La suma de sus edades actuales es 35 años.
C) En 5 años más sus edades sumarán 50 años.
D) En 10 años más el mayor tendrá 30 años.

47. Las aristas de un cubo disminuyen en 2 cm, disminuyendo el volumen del cubo en 296 cm^3.
¿Cuánto medían inicialmente estas aristas?

A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 36 cm

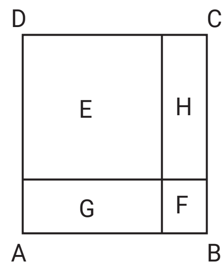
48. Un número tiene dos cifras, tal que la cifra de las decenas tiene una unidad más que el doble de la otra. Si al número se le suma el producto de las cifras resulta 94, entonces ¿cuál es la diferencia de las cifras?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 7

49. En la habitación de Luis, la cual tiene forma rectangular, se ha colocado una cama cuyas dimensiones son 1,5 y 2 metros. Si el largo de la habitación es 2 metros más que el ancho y el área no ocupada por la cama corresponde al 80% de la superficie de la habitación ¿cuánto mide el largo de esta pieza?

A) 3 metros
B) 3,5 metros
C) 5 metros
D) 7 metros

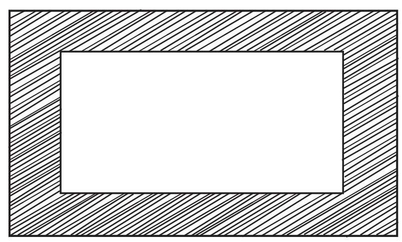
50. En el cuadrado ABCD de la figura se han trazado lineas paralelas a los lados formándose los cuadrados E y F y los rectángulos G y H. Si el lado del cuadrado E mide 4 cm más que el lado del cuadrado F y la suma de las áreas de los rectángulos equivalen al 42% del área del cuadrado ABCD, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El lado del cuadrado F mide 3 cm.
B) El área del cuadrado E es 100 cm^2.
C) El área del rectángulo G es 21 cm^2.
D) E tiene 40 cm^2 más de área que F.

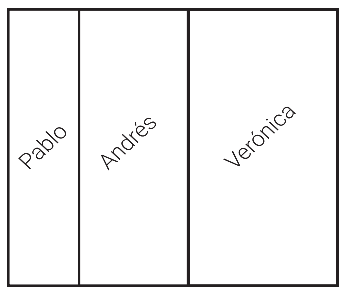
7

51. En la figura, se muestra una cartulina donde se ha pegado una fotografía, dejando un borde constante alrededor de ella. Si las dimensiones de la cartulina son 9 x 7 pulgadas y la foto ocupa los $\frac{5}{9}$ del área de la cartulina, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el ancho del borde medido en pulgadas?



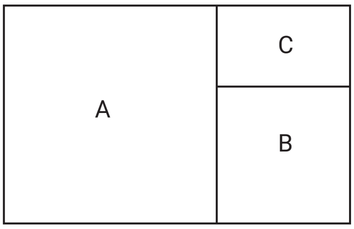
A) $(9 - x)(7 - x) = 35$
B) $(9 - 2x)(7 - 2x) = 35$
C) $(9 - 2x)(7 - 2x) = 14$
D) $\left(9 - \frac{x}{2}\right)\left(7 - \frac{x}{2}\right) = 35$

52. Francisco tiene un sitio en la playa de forma rectangular y decide subdividirlo en tres sitios también rectangulares, para que sus hijos: Pablo, Andrés y Verónica construyan sus respectivas casas de veraneo, tal como se muestra en la figura. Al hacer la subdivisión, el sitio de Pablo quedó con un fondo que mide el doble que el de su frente, el frente de Andrés mide 5 metros más que el de Pablo y 5 menos que el de Verónica. Si el sitio de Verónica quedó de 1200 m^2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El frente del sitio de Francisco era de 75 m.
B) El sitio de Pablo quedó con un área de 800 m^2.
C) Todos los sitios tienen un fondo de 40 m.
D) El sitio de Verónica quedó con 100 m^2 más que el de Andrés.

53. Verónica es una profesora de kinder y decide separar la sala de sus estudiantes en tres zonas, tal como se muestra en la figura, teniendo cada zona un área superior a 1 m^2 . Las zonas A y B son cuadradas y se destinarán al trabajo grupal y juegos respectivamente y la zona C será la zona de lectura. Si los lados del cuadrado A tienen 2 metros más que los del cuadrado B y la zona de lectura son los $\frac{2}{15}$ del área de la sala, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La zona del trabajo grupal tiene 36 m^2.
B) La zona de lectura tiene un área de 8 m^2.
C) El largo de la sala es 10 metros.
D) El área de la sala es superior a los 60 m^2.

54. Se tienen dos estanques cilíndricos,los cuales se ocupan para almacenar agua la que servirá posteriormente para regar una plantación en una parcela. El primero de los estanques tiene una altura de 12 metros y el segundo tiene una altura de 10 metros y un radio que mide 2 metros más que el radio del primer cilindro. Si el segundo estanque tiene una capacidad que supera al otro en 190π m^3 y utilizando que un cilindro recto de radio basal r y altura h tiene un volumen de $\pi r^2 h$. Según la información dada ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El radio del primer cilindro puede medir 5 m.
B) El radio del segundo cilindro puede medir 17 m.
C) Los radios de los cilindros pueden medir menos de 10 m.
D) El radio del segundo cilindro es siempre superior a 10 m.

55. Se quiere embalar una cierta cantidad de artículos en una cierta cantidad de cajas. Se sabe que si se colocan en cada caja dos artículos más que el número de cajas sobrarían 5 artículos y si se colocan 12 artículos por caja se ocuparía una caja menos y sobraría 1 artículo. Según lo enunciado, ¿cuántas soluciones posibles hay para el número de cajas?

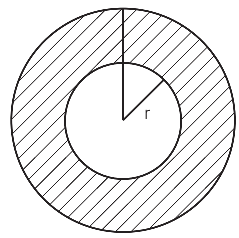
A) 0
B) 1
C) 2
D) 4

56. En una camioneta se van a trasladar botellas de aceite las cuales vienen embaladas en cajas. En el primer viaje cada caja tenía una capacidad de 2 unidades menos que el número de cajas que se transportó, en el segundo viaje se llevaron 4 cajas más, pero la capacidad de estas cajas era dos unidades menos que las del viaje anterior. Si en los dos viajes se llevaron 248 botellas de aceite, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

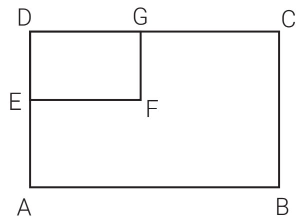
A) El número de cajas del primer viaje es 12.
B) En el segundo viaje se transportaron 128 botellas.
C) La capacidad de las cajas en el 2° viaje era de 8 unidades.
D) En total se transportaron 18 cajas.

57. En la figura, se ilustra una pista que está formada por dos circulos concéntricos donde el radio de la circunferencia menor es r metros. ¿cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas permite determinar el ancho de la pista, si el área de la pista es de 12.000π m^2?

A) $x^2 - 2rx - 12000 = 0$
B) $x^2 + 2rx - 12000 = 0$
C) $x^2 + 2rx + 12000 = 0$
D) $x^2 + rx - 12000 = 0$



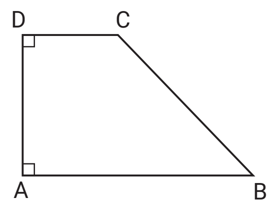
58. En la figura, el rectángulo ABCD representa el sitio de Pablo, y en él instalará una zona de juegos con césped, la que vista de arriba ocupa el rectángulo EFGD (con EF > FG). Se sabe que el largo del sitio tiene 20 metros más que el ancho, el ancho GF de la zona de juegos mide 40 metros y el largo EF mide 60 metros menos que el largo AB del sitio. Si la superficie de la zona de juegos equivale al 20% del área del sitio, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El largo del sitio de Pablo es 120 m.
B) La superficie de la zona de juegos es 2400 m^2.
C) El largo de zona de juegos es la mitad que el largo del sitio.
D) El largo del sitio de Pablo podría medir 100 m.

59. Antonio tiene un sitio de forma de trapecio rectángulo como se muestra en la figura. Si el lado AB mide 12 m más que el lado AD, BC mide 20 m y CD mide 8 m, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Uno de los lados mide 24 m.
B) El perímetro del sitio es 64 m.
C) El sitio tiene un área de 192 m^2.
D) El lado mayor mide el doble del menor.



7

60. Un campesino ha plantado lechugas en filas, poniendo en cada una de ellas la misma cantidad, de modo que la cantidad de lechugas por fila supera en dos a la cantidad de filas.
Al otro año decide aumentar en cuatro la cantidad de filas y disminuir en dos la cantidad de lechugas por fila.
Si la cantidad de lechugas plantadas durante los dos años es 756, ¿cuántas fueron plantadas en cada fila en el primer año?

A) 20
B) 22
C) 24
D) 25

Capítulo
8

PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

Como veremos en el presente capítulo, la regla de tres es de suma importancia para resolver problemas relacionados con proporcionalidad directa, inversa y porcentajes.
Esta regla se conoció en Occidente a través de los árabes, entre ellos los autores al-Jwarizmi en su Álgebra (ver referencia del cap. 4) y en Al-Biruni el que le dedicó una obra completa a este tema.
Se sabe que en la India utilizaron la regla de tres, pero según algunos autores, probablemente fue en China el primer lugar donde se resolvió problemas utilizado la proporcionalidad.
Por otro lado, la regla de tres fue dada a conocer por los árabes en la edad media y en Occidente fue difundida en el siglo XII por Leonardo de Pisa o también llamado Fibonacci, descubridor de la famosa sucesión que lleva su nombre: 1,1,2,3,5,8,..., la regla de tres era llamada la Regla de los Mercaderes conocida así por su importancia en la resolución de problemas comerciales.

Leonardo de Pisa (1170-1250)

CONCEPTOS CLAVES

- **Proporcionalidad directa**
- **Proporcionalidad inversa**
- **Constante de proporcionalidad**
- **Gráficos de Proporcionalidad Directa e Inversa**

CONCEPTO DE RAZÓN

Una razón es una comparación por cuociente, una razón es de la forma: $\frac{a}{b}$

Por ejemplo utilizamos el concepto de razón en una receta de cocina: "mezclar tres tazas de harina por una de agua".

CONCEPTO DE PROPORCIÓN. REGLA DE TRES SIMPLE.

Una proporción es igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En una proporción se cumple que los productos cruzados son iguales: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$, esta propiedad se denomina Teorema fundamental de las Proporciones.

Una proporción, es por ejemplo la siguiente igualdad: $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, si multiplicamos cruzado, obtenemos la igualdad: $4 \cdot 15 = 12 \cdot 5$.

La proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, donde a, b y c son conocidos y "x" es la incógnita se conoce como regla de tres simple.

Aplicando el Teorema Fundamental de las Proporciones obtenemos $ax = bc$, por lo tanto $x = \frac{bc}{a}$.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Existen situaciones en la vida diaria, donde al aumentar (o disminuir) una variable, la otra aumenta (o disminuye) proporcionalmente, en este caso se dice que las variables están en proporcionalidad directa.

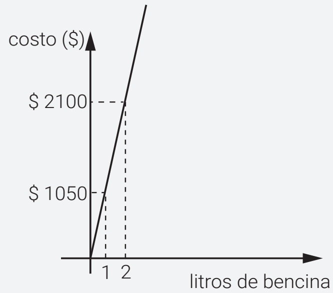
Por ejemplo, si al cargar un estanque de bencina en un servicentro, el litro vale $1.050, los dos litros valdrían $2.100, tres litros valdrían $3.150, etc, si ordenamos los datos anteriores en una tabla, obtenemos:

x (litros de bencina)	1	2	3	4
y (costo)	1.050	2.100	3.150	4.200

Si dividimos "y" con "x" nos da siempre 1050 que es la constante de proporcionalidad y que en este caso corresponde al valor de un litro de bencina.

Tenemos entonces que si se tienen dos variables x e y están relacionadas según una proporcionalidad directa, la división entre ellas es una constante, es decir $\frac{y}{x} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Si graficamos estas variables, obtendremos lo siguiente:



Tenemos entonces que las variables: número de litros de bencina (x) y su costo están en proporcionalidad directa (y), observa que si dividimos "y" con "x" obtenemos el valor del litro de bencina:

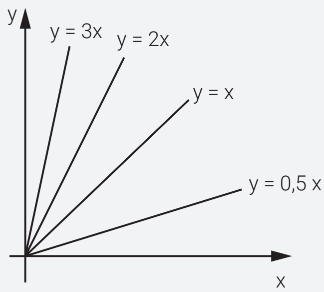
$$\boxed{\frac{y}{x} = \frac{1050}{1} = \frac{2100}{2} = \frac{3150}{3} \ldots = 1050}$$

8

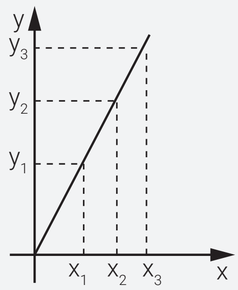
Entonces deducimos que: $\frac{y}{x} = 1050 \quad \leftrightarrow \quad y = 1050x$

esto corresponde a una función lineal que relaciona las variables x e y como veremos en el capítulo 9 y siempre el gráfico de una función lineal es una recta que pasa por el origen (o un conjunto de puntos que está sobre esta recta).
La variable x se denomina variable independiente e y la variable dependiente, debido a que como en este caso el precio (variable dependiente) dependerá de los litros de bencina que compremos (variable independiente).

Observa que a medida que aumenta la constante de proporcionalidad, la semirecta tiene una mayor inclinación:



Resumiendo, tenemos que si dos variables x e y están relacionadas mediante un proporcionalidad directa, entonces se cumple que $\frac{y}{x} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad, además la relación entre ellas: $y = kx$ corresponde a una función líneal, cuyo gráfico es una semirecta que pasa por el origen:



$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k$$

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos variables están en proporcionalidad inversa cuando una de ellas aumenta la otra disminuye proporcionalmente. Si tenemos que 4 llaves demoran 8 horas en llenar un estanque (teniendo ellas igual rendimiento), entonces el doble de llaves, es decir 8, demorarán la mitad del tiempo: 4 horas, etc.
Tendríamos entonces la siguiente situación:

x (n° de llaves)	4	8	2	1
y (horas)	8	4	16	32

Si multiplicamos "x" con "y" vemos que este producto permanece constante:

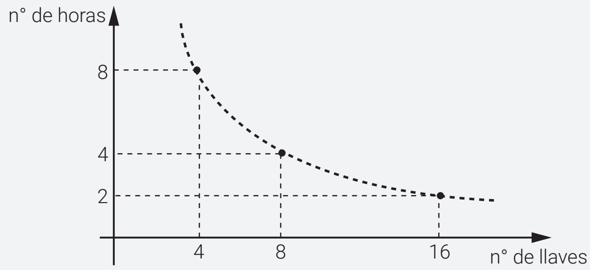
$4 \cdot 8 = 8 \cdot 4 = 2 \cdot 16 = 1 \cdot 32 = 32$

Este valor se denomina constante de proporcionalidad.

Tenemos entonces que si dos variables están en proporcionalidad inversa su producto permanece constante:

$x \cdot y = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

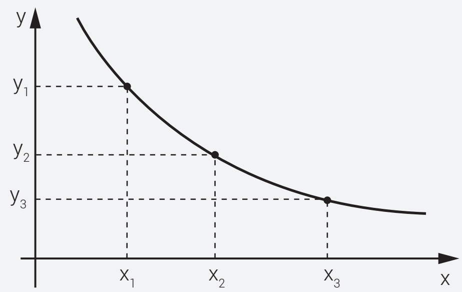
Si graficamos las variables del ejemplo, obtenemos:



Esta curva se conoce como hipérbola, y en este ejemplo se trata de una curva discontinua, ya que las variables solo toman valores discretos, es decir no toman todos los valores reales, debido a que el número de llaves solo toman números naturales.

Resumiendo, tenemos que si dos variables x e y están relacionadas mediante un proporcionalidad inversa, entonces se cumple que xy = k, donde k es la constante de proporcionalidad, además la gráfica corresponde a una curva que se denomina hipérbola, esta curva se acerca a los ejes coordenados, pero no los toca, lo cual se dice que los ejes son asíntotas de la curva.

Gráficamente:



$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots = k$$

ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:

- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En una panadería, con 80 kilos de harina obtienen 120 kilos de pan corriente.
¿cuántos kilos de harina necesitarán para hacer 150 kilos de pan corriente?

A) $53,\overline{3}$
B) 100
C) 150
D) 225

Solución:
Acá las variables kilos de harina y kilos de pan están en proporcionalidad directa, ya que si se aumenta (o disminuye) una variable la otra aumenta (o disminuye) proporcionalmente.
Como el cuociente entre las variables permanece constante, tenemos la proporción:

$\frac{80}{120} = \frac{x}{150}$, ocupando el Teorema Fundamental de las Proporciones, tenemos que:

$80 \cdot 150 = 120 \cdot x \rightarrow x = \frac{80 \cdot 150}{120} = 100$

Por lo tanto se necesitan 100 kilos de harina, para fabricar 150 kilos de pan, luego la alternativa B es la correcta.

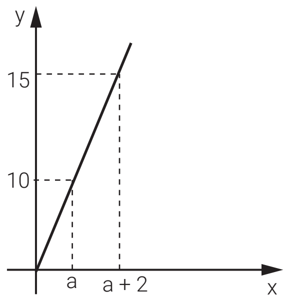
2. Un vehículo recorre un trayecto entre dos ciudades a una rapidez constante de 80 km/h demorando 30 minutos, ¿cuántos minutos menos habría demorado si el trayecto lo hubiese hecho a 100 km/h?

A) 6
B) 12
C) 18
D) 24

Solución:

Las variables rapidez y tiempo que demora en el trayecto están en proporcionalidad inversa, ya que si por ejemplo aumentamos la rapidez el tiempo que demoraría sería proporcionalmente menos.
Como las variables están en proporcionalidad inversa, tenemos que el producto de ellas permanece constante:
$80 \cdot 30 = 100 \cdot x \rightarrow x = 24'$, por lo tanto demoraría 6' menos, respuesta A).

3. En el siguiente gráfico se ilustra la relación entre las variables x e y, donde k es la constante de proporcionalidad:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $a = 4$

B) $k = 2{,}5$

C) Si $x = 6$, entonces $y = 15$.

D) Si $y = 7{,}5$, entonces $x + y = 9{,}5$

Solución:

Debido a que la gráfica es una semirecta que pasa por el origen, las variables se relacionan mediante una proporcionalidad directa, entonces se cumple la proporción:

$\frac{15}{a+2} = \frac{10}{a}$, multiplicando cruzado, obtenemos: $15a = 10(a + 2)$, de esta ecuación se deduce que $a = 4$, luego A) es verdadera.

La constante de proporcionalidad la podemos obtener dividiendo un valor de "y" con su correspondiente valor de "x": $k = \frac{10}{a} = \frac{10}{4} = 2{,}5$, luego B) también es verdadera.

Para la alternativa C) planteamos la proporción: $\frac{10}{a} = \frac{y}{6}$, reemplazando "a" por 4 y despejando "y" tenemos:

$\frac{10}{4} = \frac{y}{6} \rightarrow y = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15$, luego C) es verdadera.

Para la alternativa D) planteamos nuevamente una proporción: $\frac{10}{a} = \frac{7{,}5}{x}$, reemplazamos "a" por 4 y despejamos "x": $\frac{10}{4} = \frac{7{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{7{,}5 \cdot 4}{10} = 3$, luego $x + y = 3 + 7{,}5 = 10{,}5$, luego D) es falsa.

4. ¿En cuál de las siguientes situaciones, las variables x e y están en proporcionalidad inversa?

A)

x	y
20	4
10	8
8	12

B)

x	y
10	50
20	40
30	30

C)

x	y
25	5
40	8
10	2

D)

x	y
12	6
24	3
4	18

Solución:
Como las variables están en proporcionalidad inversa, habría que ubicar la tabla en la cual el producto de las variables permanece constante:

A)

x	y	xy
20	4	80
10	8	80
8	12	96

El producto no es constante, luego no hay proporcionalidad inversa.

B)

x	y	xy
10	50	500
20	40	800
30	30	900

A pesar de que ha medida que aumenta "x", "y" disminuye, el producto no es constante, por lo tanto no están en proporcionalidad inversa.

C)

x	y	xy
25	5	125
40	8	320
10	2	20

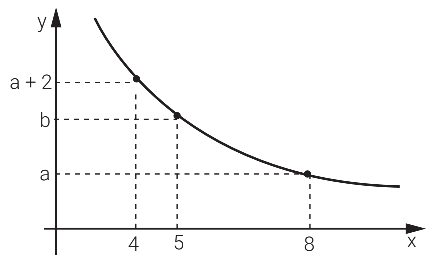
El producto no permanece constante, luego no están en proporcionalidad directa. Observa que están en proporcionalidad directa debido a que el cuociente permanece constante.

D)

x	y	xy
12	6	72
24	3	72
4	18	72

En este caso, si están en proporcionalidad inversa, ya que el producto entre las variables permanece constante, luego la alternativa es D).

5. En el gráfico de la figura se ilustra la relación entre dos variables x e y que están en proporcionalidad inversa:



Según los datos dados, el valor de b es

A) 2,8
B) 3,0
C) 3,2
D) 3,5

Solución:

Como las variables son inversamente proporcionales, el producto entre ellas permanece constante, entonces:

$4(a+2) = 8a \rightarrow 4a + 8 = 8a \rightarrow a = 2$, entonces tendríamos:

x	4	5	8
y	4	b	2

Como el producto permanece constante, tenemos que $4 \cdot 4 = 5 \cdot b \rightarrow b = 3{,}2$, luego la alternativa correcta es C).

6. A llaves pueden llenar una piscina llenan un estanque en B horas, ¿cuántos minutos menos demorarán (A+4) llaves?

A) $\dfrac{B}{A + B}$

B) $\dfrac{AB}{A + 4}$

C) $\dfrac{240B}{(A + 4)}$

D) $\dfrac{B}{15(A + 4)}$

Solución:

Las variables número de llaves y tiempo que demoran en llenar el estanque son inversamente proporcionales, luego se debe cumplir que: $AB = (A+4)x$, donde x es el tiempo en horas que demoran en llenar el estanque las (A+4) llaves, despejando, obtenemos: $\dfrac{AB}{A + 4}$

Entonces la cantidad de horas menos que se estarían demorando las (A+4) llaves sería:

$B - \dfrac{AB}{A + 4}$, lo cual nos da $\dfrac{4B}{A + 4}$, pero este tiempo está en horas y nos preguntan esta cantidad en minutos, luego multiplicamos esta expresión por 60, lo que nos da: $\dfrac{240B}{A + 4}$, luego la alternativa correcta es C).

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. A un paciente hospitalizado, hay que aplicarle 15 mg de un medicamento cada 2 días, entonces en un mes de 30 días, ¿cuántos mg de medicamento habría que aplicarle?

A) 22,5 mg
B) 125 mg
C) 225 mg
D) 250 mg

2. Una máquina industrial consume 1,2 Kwh cada 40 minutos. Si esta máquina debe estar encendida 8 horas diarias, el consumo diario medido en Kwh es

A) 7,2
B) 14,4
C) 21,6
D) 28,8

3. Tres llaves con igual flujo, trabajando juntas demoran dos horas en llenar un estanque, entonces ¿cuántas horas demorarán en llenar este estanque dos de estas llaves?

A) $1\frac{1}{3}$

B) $2\frac{1}{3}$

C) $2\frac{2}{3}$

D) 3

4. La cantidad de cloro recomendada para una piscina es una pastilla de 200 g por cada 25.000 litros de agua. Si una piscina tiene 62.500 litros, entonces la cantidad de gramos de cloro que se debe utilizar es

A) 50
B) 250
C) 500
D) 600

5. En un supermercado, 1,5 kilos de filete cuestan \$48.000. Juan quiere hacer un asado con esta carne para 8 personas y cada uno consume 300 gramos, ¿cuánto deberá gastar solo en carne?

A) \$67.200
B) \$76.800
C) \$80.000
D) \$82.000

6. Un automóvil es llenado en el servicentro con \$5.250 de bencina, con ella le alcanzará para recorrer 60 km. Si el litro de bencina cuesta \$1.050, ¿cuál es el rendimiento de este vehículo en km/L?

A) 5
B) 10
C) 12
D) 16

7. Dos máquinas retroexcavadoras pueden mover 160 m^3 por hora, ¿cuántas retroexcavadoras adicionales se requerirán si se quiere mover 500 m^3 en una hora?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7

8. Un obrero está cavando una fosa y se da cuenta que ha ocupado $2\frac{1}{4}$ horas en cavar los $\frac{3}{4}$ partes de ella, de seguir con este rendimiento, ¿cuántos minutos le faltan para terminarla?

A) $\frac{3}{4}$
B) 15
C) 45
D) 180

9. En un mes (de 30 días) he gastado \$ (a+1500) en comida. Si todos los días gasté lo mismo, entonces ¿cuánto llevaré gastado en comida al cabo de los seis primeros días?

A) \$ (0,02a + 300)
B) \$ (0,2a + 300)
C) \$ (0,2a + 1500)
D) $\$\left(\frac{a}{6} + 250\right)$

8

10. Si el consumo de aire de una persona es aproximadamente 5 litros por minuto, entonces ¿cuántos litros de aire consumirán 5 personas en 30 minutos?

A) 25
B) 30
C) 250
D) 750

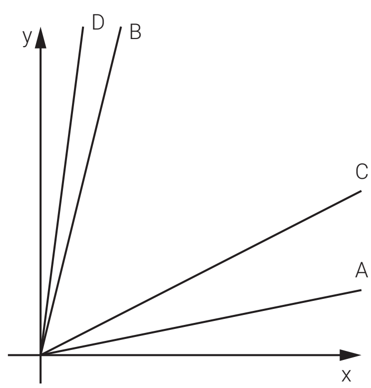
11. La pulgada es una medida de longitud ocupada en los países anglosajones. Si 5 pulgadas equivalen a 12,7 cm, entonces un clavo de $\frac{1}{2}$ de pulgada medirá aproximadamente

A) 25,4 mm
B) 12,7 mm
C) 2,4 mm
D) 1,27 mm

12. Un reloj se atrasa 2 minutos cada tres horas. Si un día se pone a la hora a las 12 de la noche, ¿qué hora marcará a las 21 horas del día siguiente?

A) 20 : 14
B) 20 : 18
C) 20 : 42
D) 20 : 46

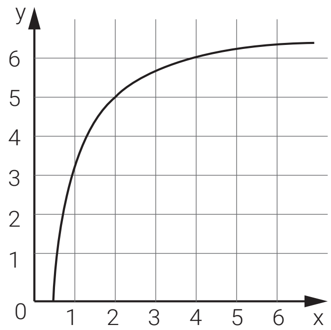
13. En el siguiente gráfico se han representado cuatro parejas de variables que están en proporcionalidad directa:

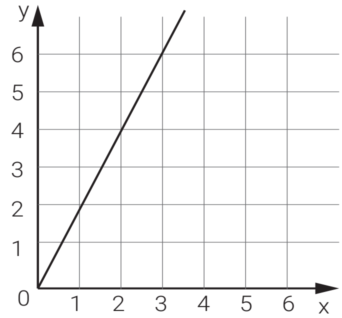


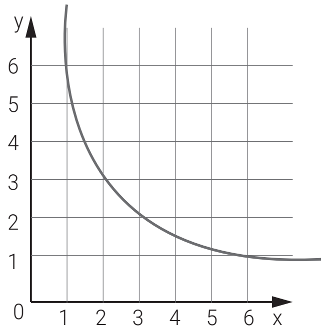
¿En cuál de las situaciones se presenta la mayor constante de proporcionalidad?

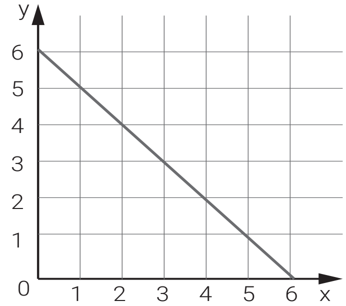
A) En A.
B) En B.
C) En C.
D) En D.

14. ¿En cuál de los siguientes gráficos, las variables son inversamente proporcionales?

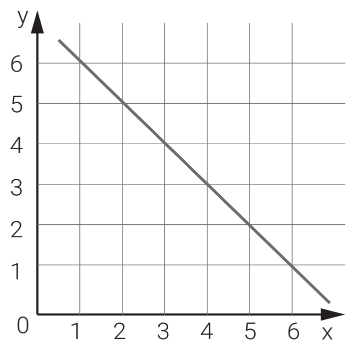
A)


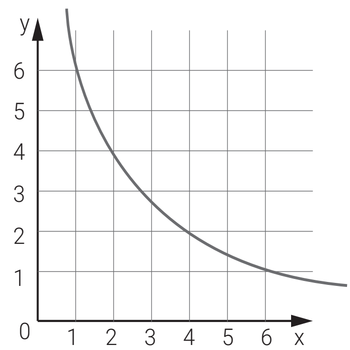
B)


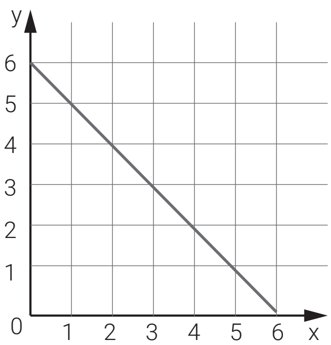
C)


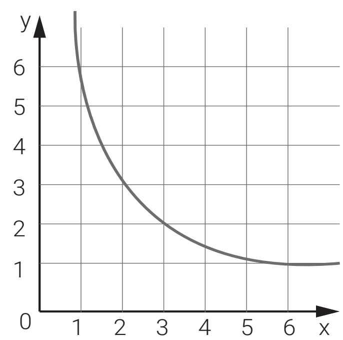
D)


15. ¿En cuál de los siguientes gráficos, las variables se relacionan mediante una proporcionalidad inversa, con constante de proporcionalidad igual a 6?

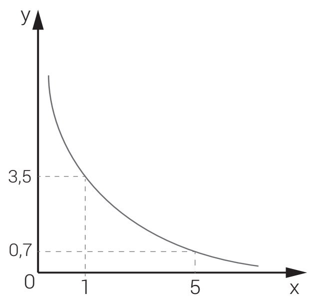
A)


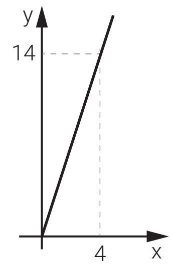
B)


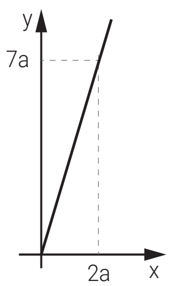
C)


D)


16. ¿En cuál de los siguientes gráficos la constante de proporcionalidad es 3,5?

A) 

B) 

C) 

D) En todos los anteriores.

8

17. Tres obreros demoran 8 horas en pintar las paredes exteriores de una casa, ¿cuántas horas menos se hubiesen demorado 4 obreros suponiendo que tienen igual rendimiento que los anteriores?

A) 1
B) 2
C) 4
D) 6

18. En una ferretería b kilógramos de clavos valen \$a, entonces $\frac{1}{2}$ kilo valdrá:

A) $\$\,\frac{a}{2b}$

B) $\$\,\frac{ab}{2}$

C) $\$\,\frac{2a}{b}$

D) $\$\,\frac{2b}{a}$

19. Una llave entrega B litros de agua por cada hora, ¿cuántas horas demorará en llenar una tina de A litros de capacidad?

A) $\frac{B}{A}$

B) $\frac{A}{B}$

C) $\frac{60A}{B}$

D) $\frac{A}{60B}$

20. ¿En cuál de las siguientes situaciones, las variables x e y están en proporcionalidad inversa?

A)

x	y
20	3
15	4
10	5

B)

x	y
10	5
20	2,5
8	6

C)

x	y
20	10
40	20
10	5

D)

x	y
20	6
15	8
10	12

21. Las variables x e y están en proporcionalidad directa, según los datos que se presentan en la siguiente tabla, $\frac{b}{a}$ es

x	y
3	1200
a	800
4	b

A) 2
B) 200
C) 400
D) 800

22. Las variables x e y están en proporcionalidad inversa, según los datos que se presentan en la siguiente tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

x	y
2	b
1500	a
30	20

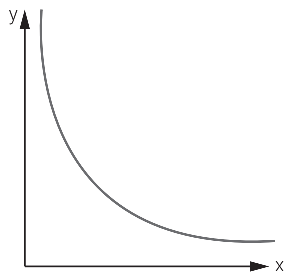
A) $b = 300$
B) $a < b$
C) $a = 750b$
D) $a < 1$

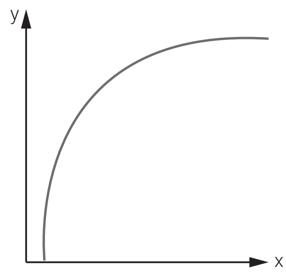
23. ¿En cuál de las siguientes situaciones, las variables son directamente proporcionales?

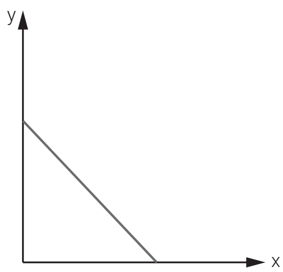
A) El radio de un círculo y su área.
B) La longitud del lado de un cuadrado y la longitud de su diagonal.
C) La longitud de la arista de un cubo y su volumen.
D) El perímetro de un triángulo equilátero y su área.

8

24. ¿Cuál de los siguientes gráficos podría corresponder al que representa las variables x el número de trabajadores e y el número de horas que se demoran en hacer un trabajo, suponiendo que los trabajadores tienen el mismo rendimiento?

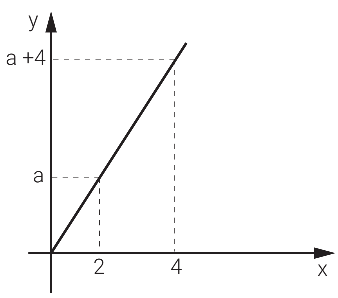
A) 

B) 

C) 

D) Ninguno de los anteriores.

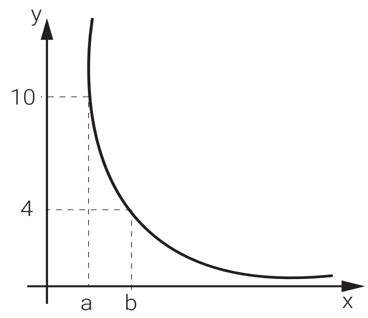
25. Según los datos dados en el siguiente gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) Si x = 3,8, entonces y = 7,6
B) Si y = 10, entonces x + y = 15
C) Si x + y = 21, entonces x = 14
D) La constante de proporcionalidad es 2.

Editorial CID

26. En el siguiente gráfico, se representan las variables x e y que se relacionan mediante una proporcionalidad inversa con constante de proporcionalidad 6, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) $5a = 2b$

B) $a + b = 2{,}1$

C) $\frac{a+b}{b} = \frac{7}{5}$

D) $\frac{10}{a} = \frac{4}{b}$

8

27. Una longitud de 1,5 metros se ha representado en un plano por una distancia de 3 cm, entonces 0,02 km en la realidad, en el plano se representa por una longitud de

A) 0,004 m
B) 0,04 m
C) 0,4 m
D) 40 m

28. En una vidriería, el valor del m^2 de vidrio de 4 mm cuesta \$48.000, ¿cuánto costará en esta vidriería un vidrio de 30 por 40 cm de ese espesor?

A) \$250
B) \$576
C) \$2.500
D) \$5.760

29. Una edición de este libro se embala en 30 cajas de 32 libros cada una, si las cajas hubiesen contenido 24 libros, entonces la cantidad de cajas hubiesen

A) aumentado en 8.
B) aumentado en 10.
C) aumentado en 40.
D) sido las mismas.

30. Yendo un vehículo a una rapidez de 80 km/h demoraría 6 horas en recorrer la distancia entre dos ciudades. Si hubiese ido a 100 km/h, ¿cuánto tiempo menos habría demorado?

A) 4 horas y 8 minutos
B) 4 horas y 48 minutos
C) 1 hora y 2 minutos
D) 1 hora y 12 minutos

31. Una persona da un promedio de b pasos por minuto. Si cada paso es de p cm, entonces en una hora recorrerá:

A) bp cm

B) 60bp cm

C) $\frac{60}{bp}$ cm

D) $\frac{60p}{b}$ cm

32. N obreros cavan una zanja de B m^3 en una hora, ¿cuántas horas demorarán (N + 30) obreros?

A) $\frac{N}{N + 30}$

B) $\frac{N + 30}{N}$

C) N(N + 30)

D) $\frac{B(N + 30)}{N}$

33. Si 50 metros equivalen aproximadamente a 55 yardas, entonces la distancia Viña-Santiago (105 km) equivale a

A) 1.205 yardas
B) 5.775 yardas
C) 60.500 yardas
D) 115.500 yardas

34. El rendimiento de una pintura, según lo que indica el envase, es de 35 m^2 por galón, considerando que se le aplica una mano de pintura. ¿cuántos galones de esta pintura se deberán comprar para pintar una pared de 14 metros de largo por 7 metros de alto si se aplicarán dos manos de pintura?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

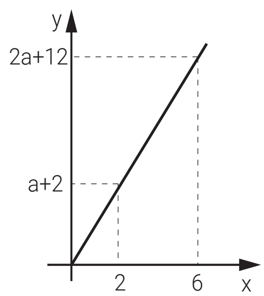
35. Para hacer una docena de pan amasado, entre otros ingredientes se necesitan 500 g de harina y 30 g de manteca, ¿cuántos gramos de harina y manteca respectivamente se necesitarán para hacer 30 panes?

A) 1.250 y 75
B) 1.500 y 75
C) 1.250 y 90
D) 1.500 y 90

36. Felipe acude a una casa de cambio y compra 120 USD en $102.000 y 50 € en $47.500, si hubiese comprado 45 USD y 30 € le habría costado

A) menos de $50.000.
B) entre $50.000 y $60.000.
C) entre $60.000 y $70.000.
D) más de $70.000.

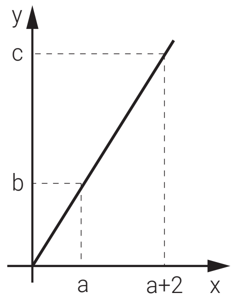
37. Según los datos dados en el siguiente gráfico:



¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8

38. Según los datos dados en el siguiente gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La constante de proporcionalidad es $\frac{c}{a+2}$.

B) $\frac{c}{b} = \frac{a+2}{a}$.

C) ay = bx

D) c = b + 2

39. ¿En cuál de las siguientes situaciones, las variables son inversamente proporcionales?

A) La rapidez de un vehículo y el tiempo en recorrer un trayecto, si la rapidez se mantiene constante en todo el trayecto.
B) El volumen de un gas y la presión que es sometido, si la temperatura se mantiene constante.
C) Con una botella de 2 litros de agua, la cantidad de vasos que se pueden servir y la cantidad de cc que se echan en cada vaso, suponiendo que los vasos son servidos con la misma cantidad.
D) Todas los anteriores.

40. Para hacer un radier se debe hacer una mezcla que contiene una parte de cemento, dos de arena y tres de gravilla. Si se tienen 3 carretillas de arena y se desea ocupar toda esta arena para hacer una mezcla, ¿cuántas carretillas de cemento y gravilla se necesitarán?

	cemento	gravilla
A)	2	4
B)	1,5	4,5
C)	2	6
D)	3	9

41. Para hacer un queque para 8 personas se necesita entre otros ingredientes: 4 tazas de harina y 3 huevos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Para hacer un queque para 12 personas se necesitarán 6 tazas de harina.

B) Si para hacer un queque, se quieren ocupar 4 huevos, entonces se deben ocupar $5\frac{1}{3}$ tazas de harina.

C) Con 10 tazas de harina se puede hacer un queque para 20 personas.

D) Con 6 tazas de harina y 4 huevos se puede hacer un queque para 12 personas.

42. B bombas de igual rendimiento necesitan A horas para vaciar una piscina, si las bombas fueran 3 más del mismo tipo, ¿cuántas horas demorarían todas ellas en vaciar esta piscina?

A) $\frac{AB}{3}$

B) $\frac{3A}{B}$

C) $\frac{AB}{B+3}$

D) $\frac{A(B+3)}{B}$

43. Para llevar una cosecha de tomates a una planta de packing se han ocupado B cajas de A kg cada una, si se desea embalar este cargamento en C cajas iguales, ¿cuál es la capacidad de estas cajas?

A) $\frac{AC}{B}$ kilos

B) $\frac{AB}{C}$ kilos

C) $\frac{A}{BC}$ kilos

D) $\frac{C}{AB}$ kilos

44. Una empresa de eventos, estima que para un cocktail de 20 personas se consumirán 100 canapés y 8 litros de bebida. Si cada litro de bebida tiene un costo de $800 y cada canapé de $200, ¿cuál sería el precio de costo de estos dos productos para un cocktail de 250 personas?

A) Menos de $200.000
B) Entre $200.00 y $300.000.
C) Entre $300.000 y $350.000
D) Más de $350.000.

45. Tres jardineros cortan el cesped de una cancha de fútbol de 90 por 120 metros en 4 horas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si hubiesen sido 2 jardineros, de igual rendimiento que los anteriores, hubiesen demorado dos horas más.
B) A las 3 horas, los 3 jardineros trabajando a una rapidez constante habrían cortado 8.100 m^2 de cesped.
C) A las dos horas, los jardineros habrían cortado el cesped equivalente al de una cancha de fútbol de 45 por 60 metros.
D) Si hubiesen sido 5 jardineros, cuyo rendimiento es igual al de los anteriores, hubiesen cortado el cesped de 18.000 m^2 en el mismo tiempo.

8

46. En un casino, tres fichas blancas equivalen a 5 rojas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) 9 blancas y 5 rojas equivalen a 20 rojas.
B) 9 rojas y 3 blancas equivalen a 14 rojas.
C) 10 rojas y 15 blancas equivalen a 20 blancas.
D) 10 blancas y 15 rojas equivalen a 19 blancas.

47. Una tienda ofrece la posibilidad de comprar un celular en la cantidad de cuotas que uno quiera, con un máximo de 12, conservando el precio contado. Entonces el número de cuotas y el monto de ellas son variables que están

A) en proporcionalidad directa.
B) en proporcionalidad inversa.
C) ni en proporcionalidad directa ni inversa.
D) falta información para determinarlo.

48. Un médico receta a un paciente $\frac{1}{2}$ comprimido de un fármaco 3 veces al día por 90 días.

Si la caja de este remedio vale $8.000 y trae 30 comprimidos, ¿qué costo tendrá este tratamiento?

A) $24.000
B) $32.000
C) $40.000
D) $80.000

49. Las plantas del jardín de Claudia están siendo atacadas por un cierto parásito, para solucionar esto, debe aplicar un desinfectante cuyas instrucciones de uso dice que hay que mezclar 15 cc del desinfectante por cada 3 litros de agua. Al verter el desinfectante en un balde se da cuenta que se equivocó en la medición y echó 20 cc, si ella quiere seguir las instrucciones correctamente, la cantidad de litros de agua que debe verter en el balde son

A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 4

50. Un envase de cartón de forma de paralelepípedo recto está lleno de café granulado. Las dimensiones del envase son 10 cm, 18 cm y 6 cm y en las instrucciones dice que con este contenido se pueden servir 150 tazas de café. Si las dimensiones del envase hubiesen sido 8 cm, 15 cm y 12 cm, y este hubiese estado lleno de café, entonces las tazas que se pudiesen servir con este nuevo envase comparado con el primero, son

A) 20 tazas más.
B) 50 tazas más.
C) 200 tazas más.
D) las mismas.

51. En una librería, un pack de 3 cuadernos universitarios cuesta $1.800 y si se compra una docena se aplica un descuento de un 5%, ¿cuánto costarán 2 docenas de estos cuadernos?

A) $6.840
B) $12.960
C) $13.680
D) $14.040

52. Una llave que gotea provoca un desperdicio de 320 litros a la semana y una persona que se lava los dientes, con el agua corriendo, provoca una pérdida de 30 litros por día. Si en una casa hay seis integrantes que tienen la mala práctica de lavarse los dientes con el agua corriendo y hay una llave que gotea, entonces en una año (52 semanas) el desperdicio de agua medido en litros es de

A) 1.580
B) 26.000
C) 27.560
D) 82.160

53. Dos maestros de construcción han demorado 3 horas en hacer una zanja de 2 metros de ancho, 4 metros de largo con una profundidad de 1,5 metros, si ellos desean instalar a lo largo de esta zanja una tubería que mide 10 metros de largo, entonces si siguen al mismo ritmo que han trabajado, demorarán

A) 6 horas
B) 7,5 horas
C) 15 horas
D) 18 horas

54. Dos ruedas están unidas por una correa, la primera tiene un radio de 20 cm y la segunda un radio de 50 cm, si la primera da 80 vueltas, entonces la segunda da

A) 12,5 vueltas.
B) 24 vueltas.
C) 32 vueltas.
D) 200 vueltas.

55. Para hacer un pozo para extraer agua, una empresa ocupa un taladro que le permite perforar 12 metros en 5 horas. Si el valor hora de la perforación es de \$30.000 y se necesita que se taladren 180 metros, ¿cuál es el valor de esta obra, considerando que no hay interrupciones?

A) \$1.800.000
B) \$2.100.000
C) \$2.250.000
D) \$2.500.000

56. 1.200 gramos de alimento alcanza para alimentar 5 conejos durante 24 días Si los conejos hubiesen sido 8, ¿para cuántos días **menos** habría alcanzado este alimento, suponiendo que todos comen lo mismo?

A) 5
B) 6
C) 9
D) 15

57. Si una cantidad de vasos iguales son llenados con jugo hasta los $\frac{3}{4}$ de su capacidad, se podrían servir 24 vasos, si los vasos se hubiesen llenado hasta los $\frac{2}{3}$ de su capacidad, se habrían servido

A) 1,5 vasos más.
B) 2 vasos más.
C) 3 vasos más.
D) 4 vasos más.

58. Sea y es el volumen (en cm^3) de una pieza de cobre cuya masa es x gramos. Si la densidad del cobre es 9 g/cm^3, ¿cuál es la ecuación que relaciona las variables x e y?

A) $y = 9x$
B) $x = 9y$
C) $x + y = 9$
D) $xy = 9$

59. x, y y z se relacionan mediante la expresión $P = \frac{xy}{z}$, donde P es una constante, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si z es constante entonces x e y son inversamente proporcionales.
B) Si y es constante entonces x y z son directamente proporcionales.
C) Si y y z son directamente proporcionales, entonces x es constante.
D) x y z son directamente proporcionales, lo mismo que y con z.

60. a y b son directamente proporcionales, tal que a es la variable independiente y k es la constante de proporcionalidad. Si a + b = 10, entonces a =

A) $\frac{10}{k}$

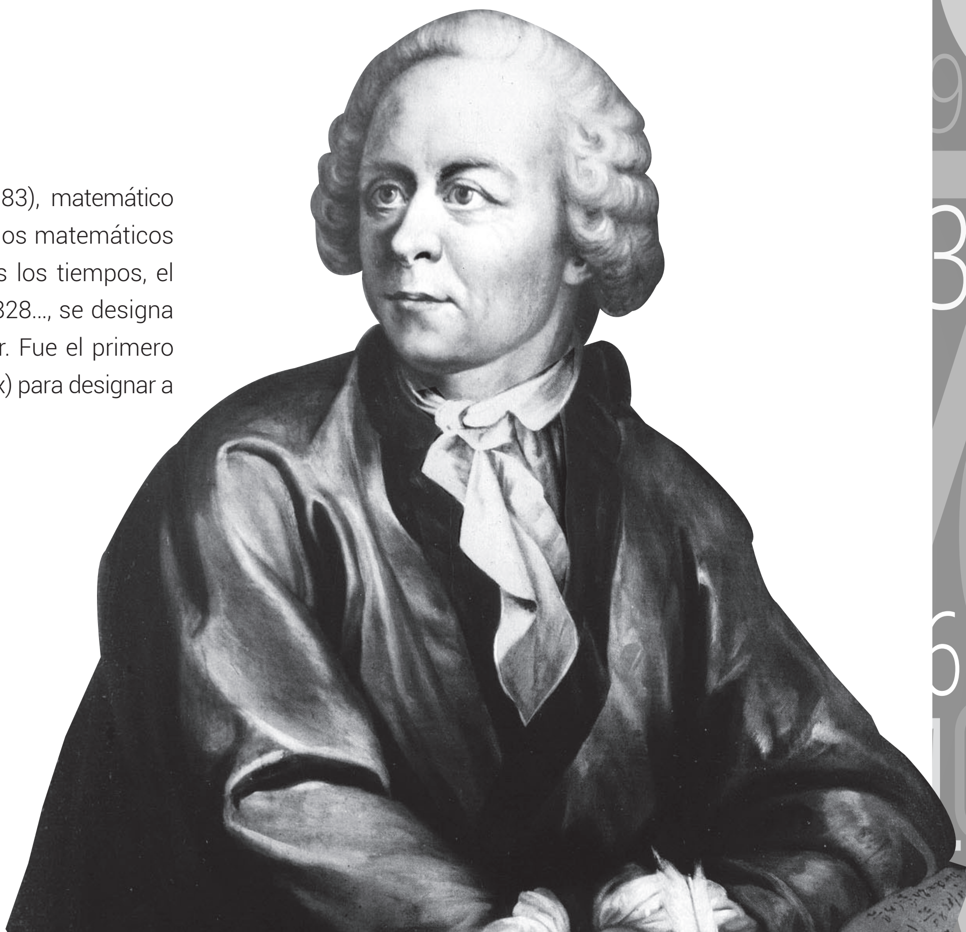
B) $\frac{10}{1 + k}$

C) $\frac{10k}{1 + k}$

D) $10 - k$

Capítulo
9

FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN



Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suizo, considerado uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, el número irracional e=2,71828..., se designa con esta letra en su honor. Fue el primero en introducir la notación f(x) para designar a las funciones.

CONCEPTOS CLAVES

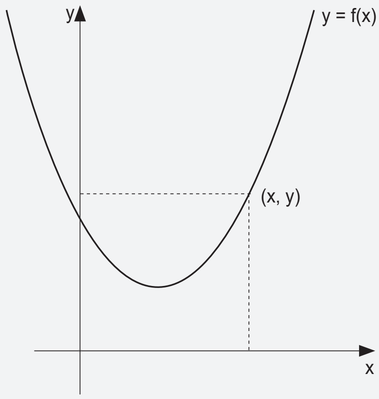
- **Dominio y recorrido**
- **Imágenes y preimágenes**
- **Función lineal**
- **Función afín**
- **Gráficos de función lineal y afín**

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función f definida de A a B relaciona los elementos de A con los de B, de modo que

(1) Todo elemento de A está relacionado con un elemento de B.
(2) Todo elemento de A se relaciona con un único elemento de B.

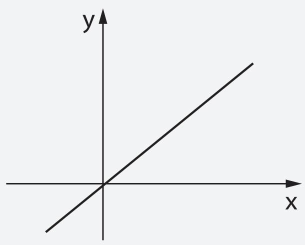
A se denomina el conjunto de partida y B el conjunto de llegada, al elemento del conjunto de partida se llama preimagen y al elemento con que se relaciona de B se llama imagen y se designa con la letra y.
Si la función la designamos con la letra f, entonces la notación y = f(x) hace alusión que "y" es la imagen de "x" (o que "x" es la preimagen de "y"). El conjunto de las preimágenes se llama dominio y el conjunto de las imágenes se llama recorrido.
En un sistema cartesiano, la imagen la pondremos en el eje vertical o eje de las ordenadas y la preimagen en el eje horizontal o eje de las abscisas.



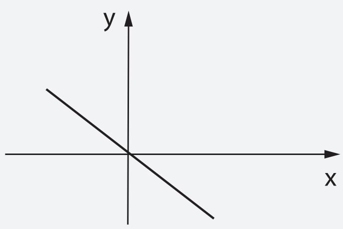
El gráfico de la función está formado por puntos (x,y) donde y = f(x).

FUNCIÓN LINEAL

Es de la forma f(x) = mx, donde m ≠ 0, su gráfica es una recta que pasa por el origen y m es la pendiente de esta recta, la cual indica la inclinación de la recta:

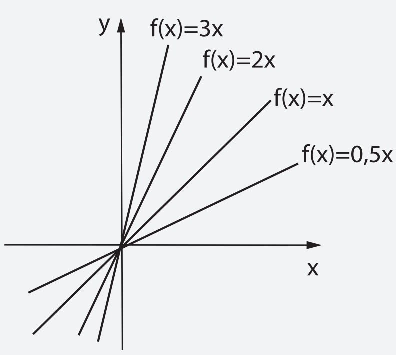


m > 0

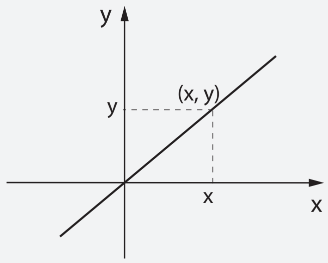


m < 0

Si m > 0, la función es creciente, es decir a mayor "x" mayor "y", si m < 0, la función es decreciente, a mayor "x" menor "y".
Observa que a mayor pendiente, la inclinación de la recta con respecto al eje x es mayor:



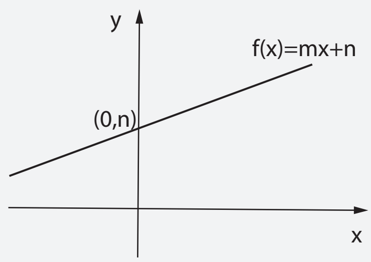
Observación: en una función lineal, la relación entre las variables corresponde a una proporcional directa:



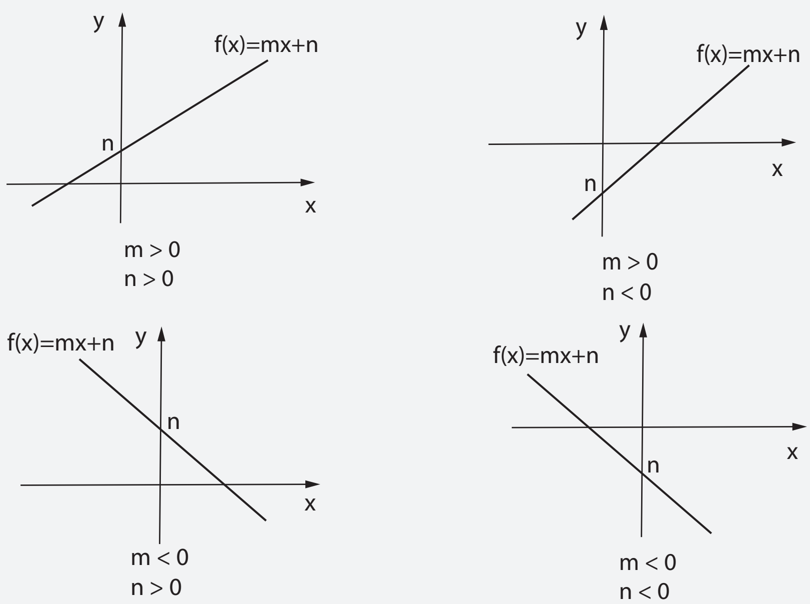
Para todo punto (x, y), excepto el (0, 0) se cumple que $\frac{y}{x} = k$, donde k es una constante que coincide con la pendiente m.

FUNCIÓN AFÍN

Es de la forma f(x) = mx + n, donde m al igual que en la función lineal, corresponde a la pendiente y n es el coeficiente de posición, donde (0, n) es el punto donde la recta intersecta al eje y.



- **Gráfico de la función afín**
  Gráficamente, en la función afín podemos tener las siguientes situaciones:



- **Determinación de la función afín dados dos puntos de su gráfica**

  Supongamos que tenemos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la gráfica de una función afín, podemos determinar la pendiente de su gráfica, a través de la expresión:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Posteriormente podemos encontrar la función a través de la fórmula:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \quad \text{(ecuación punto-pendiente)}$$

Este método lo ocuparemos en el ejercicio resuelto 4.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$, ¿cuál es la preimagen del 10?

Solución:

Como $f(x) = 10$, planteamos la ecuación $10 = \frac{2}{3}x - 2$, despejando "x" obtenemos $12 = \frac{2}{3}x \rightarrow x = 18$, por lo que la preimagen del 10 es 18.

2. En un estanque hay 1.800 litros y una bomba extrae 60 litros por minuto, determina el modelo que describe la cantidad C(t) de litros que hay en el estanque después de t minutos que se activa la bomba.

Solución:

Como en un inicio hay 1.800 litros, por cada minuto que pasa la bomba saca 60 litros del estanque, luego a los "t" minutos extraerá 60t litros, entonces la función que modela la cantidad de litros que queda en el estanque es $C(t) = 1.800 - 60t$

3. Un modelo para la temperatura T, en grados Celcius (°C), de un líquido está dada por $T(t) = 80 - 2t$, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 12 minutos la temperatura del líquido será de 56 °C.
B) Para que la temperatura del líquido llegue a 0° C se requieren más de 30 min.
C) A los 20 minutos la temperatura habrá bajado a la mitad.
D) La temperatura aumenta a razón de 2 °C por minuto.

Solución:

En A) si reempazamos t = 12 en la función obtenemos $T(12) = 80 - 2 \cdot 12 = 56$ °C, luego es A) es correcta.

En B) igualemos T(t) a cero, con lo que llegamos a la ecuación $T(t) = 80 - 2t = 0 \rightarrow t = 40'$, luego B) es verdadera.

Al inicio, es decir para t = 0, la temperatura era $T(0) = 80 - 2 \cdot 0 = 80$ °C y a los 20 minutos la temperatura era $T(20) = 80 - 2 \cdot 20 = 40$ °C, luego C) es verdadera.

Si analizamos la función dada $T(t) = 80 - 2t$, tenemos que su pendiente es -2, lo que indica que la variable dependiente, la temperatura, baja 2 °C por cada minuto, por lo tanto D) es FALSA.

4. Un técnico cobra un costo fijo por la visita a domicilio más un cierto valor por hora trabajada.
Se sabe que por 3 horas cobra \$57.000 y por 4 horas \$72.000.
Determina la función que modela el costo según la cantidad x de horas trabajadas.

Solución:

pongamos que por la visita a domicilio cobra \$a y que cobra \$b por cada hora de trabajo, entonces el costo por t horas de trabajo está dado por la función $C(t) = a + bt$.

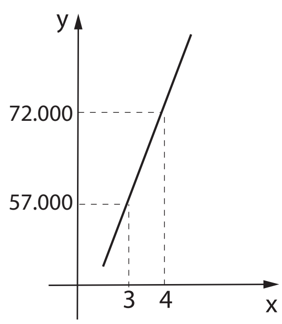
Tenemos que para 3 horas cobra \$57.000, entonces $a + 3b = 57000$, por 4 horas cobra \$72.000, entonces $a + 4b = 72.000$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} a + 3b = 57000 \\ a + 4b = 72000 \end{array}\right|$, obtenemos que $b = 15.000$ y $a = 12.000$, luego la función

que determina el costo a cancelar por x horas de trabajo es $C(x) = 12000 + 15000x$.

Otra forma de hallar la función es ocupar la ecuación punto-pendiente.

Tenemos la siguiente situación:



Como la gráfica pasa por los puntos (3, 57000) , (4, 72000), primero calculamos la pendiente de la gráfica

utilizando la expresión: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, en este caso obtenemos: $m = \frac{72000 - 57000}{4 - 3} = \frac{15000}{1} = 15000$,

ahora utilizamos la ecuación punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$, reemplazando tenemos que $y - 57000 = 15000(x - 3)$, desarrollando y despejamos "y" se tiene: $y = 15000x + 12000$, luego la función pedida es $C(x) = 15000x + 12000$, la misma que obtuvimos con el método anterior.

9

5. Sea la función definida en los reales, mediante $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2x + 5$, entonces $f(x) =$

A) $6x - 7$
B) $6x + 1$
C) $6x + 3$
D) $6x + 5$

Solución:

Lo que haremos para resolver esta situación es hacer un cambio de variable. Para ello a la expresión $\frac{x+2}{3}$ la designaremos con una nueva letra, por ejemplo u, entonces: $u = \frac{x+2}{3}$, en esta ecuación despejamos x, con lo que obtenemos $x = 3u - 2$, entonces la expresión dada $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2x + 5$, se transforma en

$f(u) = 2(3u - 2) + 5$, desarrollando y reduciendo términos, obtenemos $f(u) = 6u + 1$, ahora cambiamos "u" por "x"

y obtenemos finalmente que $f(x) = 6x + 1$, alternativa B).

6. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x + 2) = 2f(x) + 5$. Si $f(6) = 59$, entonces $f(0) =$

Solución:

Como acá no tenemos explícitamente la función f, lo que haremos es darnos diversos valores para "x" de modo de relacionar las preimágenes 0 y 6.

Si nos damos el valor $x = 4$, en la expresión dada podemos formar al lado izquierdo $f(6)$ cuyo valor conocemos, entonces:

(1) Si $x = 4 \rightarrow f(6) = 2f(4) + 5$
(2) Si $x = 2 \rightarrow f(4) = 2f(2) + 5$
(3) Si $x = 0 \rightarrow f(2) = 2f(0) + 5$

En (1) reemplazamos $f(6)$ por 59 y despejamos $f(4)$ lo cual nos da 27, reemplazamos $f(4) = 27$ en (2) y despejamos $f(2)$ lo que da 11, reemplazando $f(2) = 11$ en (3), despejamos $f(0)$ y obtenemos 3.

Respuesta $f(0) = 3$

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. Sea una función definida en los reales, mediante $f(x) = \frac{2x + 1}{3}$, entonces $f(4) - f(7) =$

A) -4
B) -2
C) 2
D) 8

2. Sea la función definida en los reales mediante $f(x) = 2x + 3$, entonces $f(a + b) - f(b) =$

A) 2a
B) 2a + 6
C) 2a – 3
D) 2a – b

3. Sean las funciones f y g definidas en los reales mediante $f(x) = 5x - 2$ y $g(x) = 3x$, entonces $f(g(2)) =$

A) 20
B) 24
C) 28
D) 30

4. ¿En cuál de las siguientes tablas de valores se muestra una relación que puede ser modelada a través de una función de la forma $f(x) = qx$, con dominio el conjunto {-1, -2, 1} y q es una constante?

A)

x	g(x)
-2	1
-1	2
1	3

B)

x	h(x)
-2	4
-1	1
1	1

C)

x	j(x)
-2	1
-1	1
1	1

D)

x	k(x)
-2	-2/3
-1	-1/3
1	1/3

9

5. En una piscina hay 1.500 litros y el desagüe bota medio litro por minuto.
La función que describe la cantidad de litros (L) que habrá en la piscina a las "x" horas después de abrir el desagüe es

A) $L(x) = 1500 - \dfrac{x}{120}$

B) $L(x) = 1500 - \dfrac{x}{2}$

C) $L(x) = 1500 - 30x$

D) $L(x) = (1500 - 30)x$

6. Jorge tiene que enviar su vehículo a reparaciones y tiene dos talleres en su sector, el taller "Daytona" cobra un costo fijo de 3 UF más 2 UF por cada hora de trabajo, mientras que el taller "Le Mans" cobran 2,5 UF por cada hora de trabajo y no cobran cargo fijo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si la reparación es inferior a 6 horas es más conveniente "Le Mans".
B) A las 6 horas ambos talleres son igualmente convenientes.
C) Si la reparación es de 8 horas, la diferencia positiva entre los costos de ambos talleres es superior a 1 UF.
D) Si la reparación es de 4 horas, "Daytona" cobraría un 10% más que "Le Mans".

9

7. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales corresponde a una función afín tal que f(2) = -6?

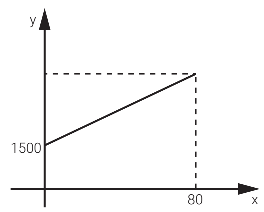
A) $f(x) = -3x$

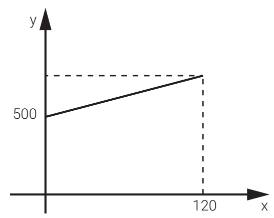
B) $f(x) = -2x + 2$

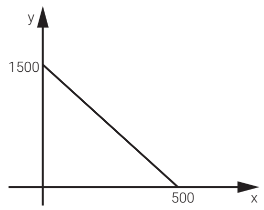
C) $f(x) = -5x + 4$

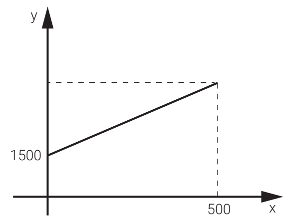
D) $f(x) = -x^2 - 2$

8. Una compañía de transporte, para trayectos menores a 500 km, para encomiendas inferiores a 3 kilos cobra un costo fijo de $1.500 más $120 por cada km que haya al destino. Si la tarifa se modela mediante una función de la forma f(x) = mx + n, ¿cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la gráfica de f?

A) 

B) 

C) 

D) 

9. En la siguiente tabla se muestra el resultado obtenido por un laboratorio de una marco de automoviles acerca del consumo de un vehículo de una cierta marca y modelo, según su rapidez:

rapidez	consumo
Entre 0 y 60	15 km/L
Entre 60 y 80	14 km/L
Entre 80 y 120	12 km/L

En un viaje al sur del país, un vehículo de esta marca y modelo se desplazó durante 90 km a una rapidez media de 55 km/h y en la tarde anduvo k kilómetros a una rapidez media de 100 km, entonces la función que modela la cantidad de litros de combustible C(k) en términos de los k kilómetros recorridos durante este viaje es

A) $C(k) = 6 + 12k$

B) $C(k) = 90 \cdot 15 + 12k$

C) $C(k) = 6 + \frac{k}{12}$

D) $C(k) = \frac{1}{6} + \frac{12}{k}$

10. Se tiene la función f, definida en los reales, mediante $f(x) = \frac{2}{5}x + 3$, ¿cuál es la preimagen del -5?

A) -20
B) -5
C) 1
D) 3

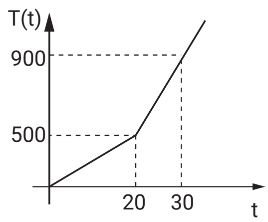
11. ¿Cuál de las siguientes relaciones **NO** se puede escribir como una función de la forma $f(x) = kx$, con k una constante y con dominio en los números reales positivos?

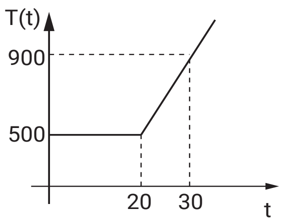
A) El perímetro de un cuadrado en función de la longitud de sus lados.
B) La diagonal de un cuadrado en función de la longitud de sus lados.
C) El área de un cuadrado en función de la longitud de sus lados.
D) La altura de un triángulo equilátero en función de la longitud de sus lados.

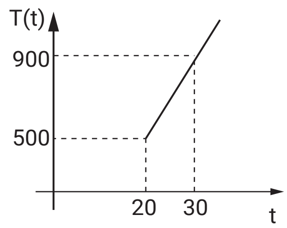
12. Sea una función definida en los reales mediante $f(x) = ax + b$, ¿cuánto valen **a** y **b** respectivamente, si $f(2) = -1$ y $f(3) = -2$?

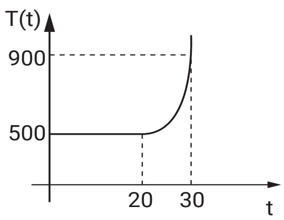
A) –1 y –1
B) –1 y 1
C) –2 y –1
D) –2 y 1

13. En un estacionamiento cobran $500 lo que te da derecho a estacionar 20 minutos y posteriormente cobran $40 por cada minuto adicional. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la tarifa T(t) a los t minutos de estacionamiento?

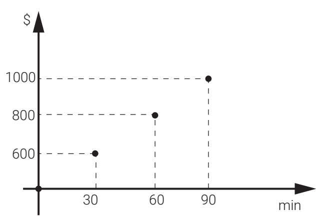
A) 

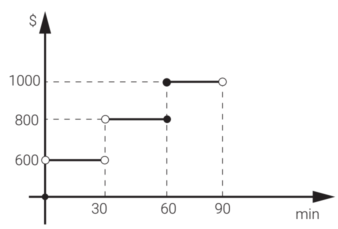
B) 

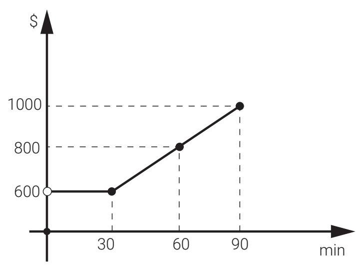
C) 

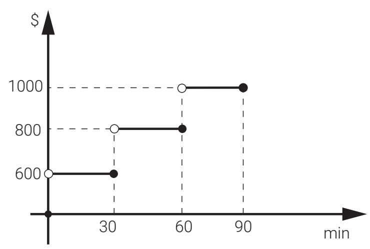
D) 

14. En el estacionamiento "Autopark", la tarifa es de $600 los primeros 30 minutos, más $200 por cada 30 minutos o fracción de este. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la tarifa del estacionamiento según la cantidad de minutos en el que el vehículo permanece en el recinto?

A) 

B) 

C) 

D) 

Editorial CID

15. En la siguiente tabla se muestra el consumo en kWh/mes de ciertos artefactos que se encuentran en una oficina:

Artefacto	kWh/mes
Iluminación	9
Hervidor	7
Computadores	14

Además se ocupa una cafetera la que consume 0,4 kWh cada 15 minutos y se sabe que esta diariamente se ocupa 45 minutos. La compañía de electricidad de esta oficina tiene un cobro fijo de $1500 y un cobro de $P por cada Kwh de consumo, entonces la función que modela el cobro C(P) de la compañía de electricidad en un mes de 30 días es

A) $C(P) = 1500 + 30P + 1{,}2P$
B) $C(P) = 1500 + 30P + 1{,}2 \cdot 30P$
C) $C(P) = 1500 + 30 + 1{,}2P$
D) $C(P) = 1500 + 30 \cdot 30P + 1{,}2 \cdot 30P$

16. Un pediatra indica que hay que administrarle a un niño 0,025 gramos de un medicamento por cada kilo que este tenga. Según esto, ¿cuál de las siguientes funciones modela la cantidad de gramos que habría que administrarle a un niño que pesa **m** gramos?

A) $m \cdot 0{,}025$

B) $\dfrac{m}{0{,}025}$

C) $\dfrac{m}{1000} \cdot 0{,}025$

D) $\dfrac{0{,}025 \cdot 1000}{m}$

17. La tarifa de una compañía eléctrica consiste en un cargo fijo de $a más $b por cada kWh de consumo, donde a y b son constantes positivas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

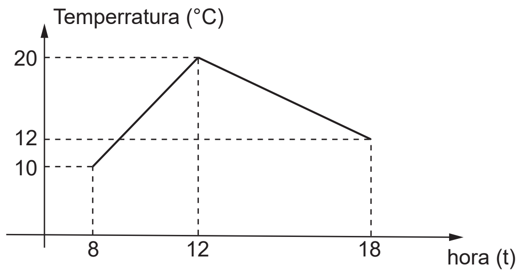
A) Si la tarifa fue de $c, entonces el consumo fue de $\left(\dfrac{c-a}{b}\right)$ kWh.

B) Para un consumo de $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ kWh, la tarifa fue de $(2a).

C) La tarifa es siempre superior a $a.

D) Por cada aumento en el consumo de c kWh la tarifa aumenta en $(bc).

18. En el siguiente gráfico se ilustra la temperatura T(t) de una habitación entre las 8 y las 18 horas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La función que modela la temperatura entre las 8 y 12 horas es $T(t) = 2{,}5t - 10$.

B) La función que modela la temperatura entre las 12 y 18 horas es $T(t) = -\frac{4}{3}t + 36$.

C) Entre las 8 y las 12 horas la temperatura sube 2,5° C por hora.

D) A las 16 horas la temperatura era superior a los 16° C.

19. En una compañía de arriendo de vehículos, el valor del arriendo consiste en $18.000 diarios, lo que te permite recorrer hasta 200 km, pero si andas más de este kilometraje te cobran $100 por cada kilómetro adicional. Fernando arrienda un vehículo que conducirá n kilómetros ($n > 200$) en un cierto día, ¿cuál de las siguientes funciones permite determinar el cobro $C(n)$ del arriendo del vehículo por ese día?

A) $C(n) = 18000 \cdot 200 + 100(n - 200)$

B) $C(n) = 18000 + 100(200 - n)$

C) $C(n) = 18000 + 100(n - 200)$

D) $C(n) = 18100(n - 200)$

20. Sea la función $f(x) = \frac{3}{2}x$ definida en los reales positivos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Modela el perímetro de un cuadrado de lado $\frac{3}{8}x$ cm.

B) Modela el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide 0,5x cm.

C) Modela la longitud de la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide $2x\sqrt{3}$ cm.

D) Modela la longitud del radio de una circunferencia inscrita a un cuadrado cuyo lado mide 3x cm.

21. Sean las funciones f y g definidas en los números reales, mediante $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$ y $2g(x) - 3x + 5 = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Sus gráficas corresponden a rectas paralelas.

B) La gráfica de $f(x) - g(x)$ corresponde a una recta paralela al eje x.

C) Para todo x real, $f(x) < g(x)$.

D) $5f(x) - 2g(x)$ corresponde a una función lineal.

22. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = px - p$, con p una constante distinta de cero. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $f(p)$ es divisible por $(p - 1)$.

B) $f(p^2)$ es divisible por $(p + 1)$.

C) $f(p + 1)$ es divisible por p.

D) $f(p - 1)$ es divisible por $(p + 2)$.

9

23. La profesora de matemática de Alberto le pregunta: "en la función definida en los reales, $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, ¿cuál es la preimagen de 17?" , para resolver este problema, Alberto realiza el siguiente procedimiento:

$f(x) = (x - 3)^2 + 1$

Paso 1

$17 = (x - 3)^2 + 1$

Paso 2

$16 = (x - 3)^2$

Paso 3

$4^2 = (x - 3)^2$

Paso 4

$x - 3 = 4 \rightarrow x = 7$

La preimagen es solo el 7

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

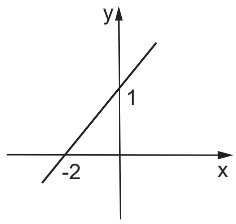
A) Cometió un error en el paso 1.

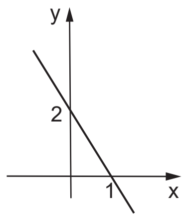
B) Cometió un error en el paso 2.

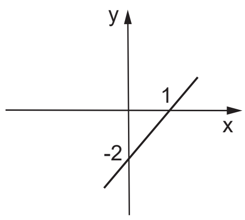
C) Cometió un error en el paso 3.

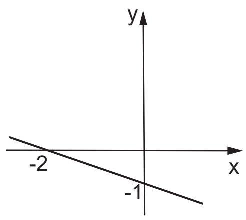
D) Cometió un error en el paso 4.

24. Las siguientes gráficas, corresponden a funciones afines, ¿cuál de ellas tiene pendiente $-\frac{1}{2}$?

A) 

B) 

C) 

D) 

25. Sea la función afín y = f(x), definida en los reales. En la siguiente tabla se muestran algunos valores para x y sus correspondientes valores para y.

x	y
3	2
5	-2

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La gráfica tiene pendiente -2.
B) La gráfica intersecta al eje de las ordenadas en el punto (0, 8).
C) La gráfica intersecta al eje x en el punto (0, 4).
D) La gráfica pasa por el punto (-2, 12)

26. Una función definida en los reales de la forma f(x) = mx + n, es tal que su gráfica pasa por los puntos (2, 9) y (7, 29), ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** ?

A) Su gráfica tiene pendiente 4.

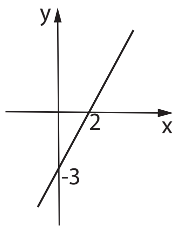
B) Su gráfica pasa por el punto (5, 21).

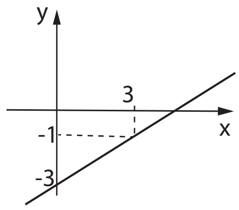
C) La preimagen a es $\frac{a-1}{4}$.

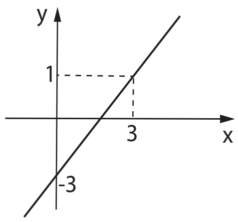
D) La imagen de (a + 1) es (4a + 4).

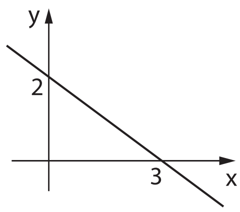
9

27. Sea la función f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$, ¿cuál de los siguientes gráficos representa a la gráfica de f?

A)


B)


C)


D)


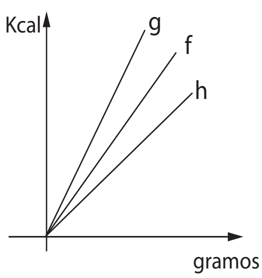
28. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = (k + 1)x - (2k - 1)$, con k una constante, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

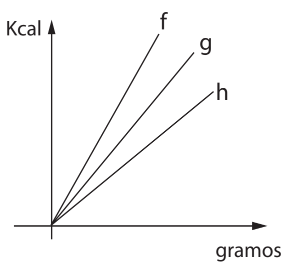
A) Su gráfica tiene pendiente igual a $(k + 1)$.
B) Su gráfica corta al eje y en el punto $(1 - 2k, 0)$
C) Si $f(4) = -3$, entonces $k = -4$
D) La gráfica pasa por el punto $(2, 3)$ para todo valor de k.

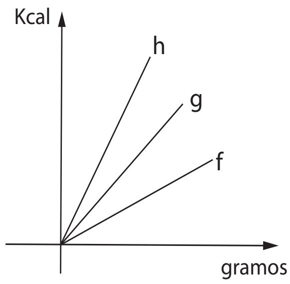
29. En la siguiente tabla se muestra la cantidad de Kcal que se consumen por cierta cantidad de gramos de algunas frutas:

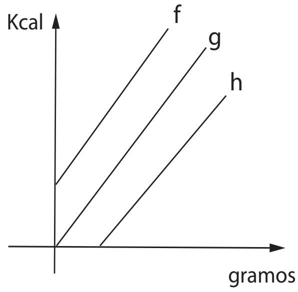
	Kcal	gramos
Ciruelas	90	200
Cerezas	25	50
Plátanos	120	100

Si f, g y h son las funciones que determinan la cantidad de Kcal que se consumen por cada x gramos de plátanos, cerezas y ciruelas respectivamente, ¿cuál de las siguientes alternativas representa mejor a la gráfica de estas tres funciones?

A)


B)


C)


D)


30. Una empresa distribuidora de electricidad, cobra a sus usuarios un cargo fijo de \$520, que corresponde a servicios de administración, más \$110 por cada kWh de consumo. Si en un cierto mes la tarifa a pagar en una cierta casa es de \$46.720, ¿cuántos kWh tuvieron de consumo en ese mes?

A) 380
B) 400
C) 420
D) 450

31. Las ganancias mensuales de una PYME, medidas en pesos, al vender x artículos, se ha modelado con la función $G(x) = 2.000x - 1.500.000$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Por cada artículo vendido la empresa tiene una ganancia de \$2.000.
B) Los costos fijos de la PYME corresponden a \$1.500.000
C) La empresa debe vender más de 75 artículos para obtener ganancias.
D) Si la empresa quiere obtener más de \$1.000.000 de ganancia debe vender más de 1.250 artículos.

32. Francisco compra 8 prendas entre poleras y camisas. Si las poleras cuestan \$5.000 y las camisas \$20.000. ¿Cuál de las siguientes funciones modela la cantidad a cancelar si (x) es el número de poleras que compra?

A) $f(x) = 25.000x$
B) $g(x) = 16.000 - 150.000x$
C) $h(x) = 160.000 - 15.000x$
D) $j(x) = 25.000x - 160.000$

33. Berta, profesora de matemática le pide a cuatro de sus alumnos(as), le indiquen alguna información que permita determinar la función definida en los reales mediante $f(x) = mx$, con $m \neq 0$.

- **Laura** dice que es suficiente con saber que $f(2) = 6$.
- **Sergio** dice que basta con conocer que $f(m) = 9$.
- **Carlos** dice que es suficiente con saber que la preimagen de 6 es 2.
- **Marta** dice que basta con conocer que el punto (4,12) pertenece a la gráfica de la función.

¿Cuál de ellos se equivoca?

A) Laura
B) Sergio
C) Carlos
D) Marta

34. Se ha determinado que la temperatura T (medida en °C) a los t minutos después de apagar la calefacción en una habitación se puede modelar con la función T(t) = 28 – 0,2t. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Al apagar la calefacción la temperatura de la habitación era 28 °C.
B) Cada 5 minutos la temperatura disminuye 1°C.
C) A las 2 horas de haber apagado la calefacción, la temperatura de la habitación será 27,6 °C
D) A los 40 minutos después de apagar la calefacción, la temperatura será de 20 °C.

35. Un profesor toma un test de 50 preguntas a los estudiantes de un curso. Si el puntaje base es de 150 puntos, por cada pregunta buena se le suman 5 puntos y por cada errada se le descuentan 2 puntos. ¿Cuál de las siguientes funciones modela el puntaje obtenido por un estudiante, suponiendo que no omite ninguna pregunta y "x" es la cantidad de preguntas que contesta correctamente?

A) $f(x) = 50 - 3x$
B) $g(x) = 250 + 3x$
C) $h(x) = 150 + 3x$
D) $r(x) = 50 + 7x$

36. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = ax - b^2$, entonces $\dfrac{f(a + b) - f(a - b)}{2} =$

A) $a + b$
B) $a - b$
C) ab
D) $b(a - b)$

37. Sea f una función lineal definida en los reales tal que f(a) = b, con $ab \neq 0$, entonces f(p) =

A) $\dfrac{pa}{b}$
B) $\dfrac{pb}{a}$
C) $\dfrac{a}{pb}$
D) $\dfrac{b}{pa}$

38. Sean f y g dos funciones definidas en los reales mediante $f(x) = 3g(x) + 5$; $g(x) = 2x - 7$, ¿cuál es la preimagen del 2 según f?

A) -4
B) -1
C) 3
D) 4,5

9

39. Sea la función f, definida en los reales mediante $f(x) = px$, con p un número entero no nulo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es siempre verdadera?

A) La imagen de p es un número entero positivo.

B) La imagen de un número positivo es positivo.

C) La imagen de un entero es un múltiplo de p.

D) La preimagen de q es $\frac{q}{p}$.

40. La compañía de electricidad Volta cobra a sus clientes un cargo fijo de \$680 más \$150 por cada kWh de consumo, mientras que la compañía Energy cobra un cargo fijo de \$500 más \$200 por cada kWh, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Para un consumo inferior a 3 kWh es más conveniente Energy.
B) Para un consumo superior a 4 kWh es más conveniente Volta.
C) Para un consumo de 3,6 kWh ambas tienen la misma tarifa.
D) Independiente del consumo es más conveniente Volta.

41. En una cierta comuna de la capital, están muy cercanas las pizzerías Roma y Palermo. Se hace un estudio comparativo de las ventas de ambas pizzerías, concluyéndose que Roma al inicio del estudio aún no vendía por haberse inaugurado en esa fecha y después fue aumentando su venta en 30 pizzas por mes, mientras que Palermo al inicio del estudio vendía 400 pizzas pero sus ventas fueron bajando en 20 pizzas cada mes.
¿A los cuántos meses después de iniciado el estudio, coincidirá el número de pizzas vendidas por ambos establecimientos?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9

42. Sean las funciones f y g definidas en los reales mediante $f(x) = px + q$, $g(x) = qx + p$, con $p \neq q \neq 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Las gráficas de ambas funciones se intersectan en el punto $(1, p + q)$.
B) Las gráficas podrían intersectarse en el mismo punto del eje x.
C) La gráfica de g no se puede obtener mediante una traslación de la gráfica de f.
D) Las gráficas de las funciones podrían ser simétricas respecto del eje y.

43. En una casa hay un desperfecto en el baño, para su reparación se piden presupuestos a los maestros Juan y Pedro. Juan cobra una UF por la visita más 0,2 UF por hora de trabajo, mientras que Pedro cobra 0,3 UF por hora trabajada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si el trabajo es inferior a 3 horas, Pedro es más económico.
B) Si el trabajo dura 12 horas, Juan es el más económico.
C) Si el trabajo dura 10 horas, ambos cobran lo mismo.
D) Para trabajos inferiores a 10 horas, Juan es el más económico.

44. Se tienen dos estanques para almacenar agua, en el primero hay 1250 litros y una bomba le extrae agua a la rapidez de 0,4 litros por segundo, mientras que en el segundo hay 800 litros y una bomba lo llena con agua a la rapidez de 0,5 litros por segundo. Si las dos bombas se accionan simultáneamente, ¿a los cuántos segundos la cantidad de agua en ambos estanques será la misma?

A) menos de 400.
B) entre 400 y 500.
C) a los 500.
D) más de 500.

45. En una fábrica de estanterías, se ha establecido que la cantidad de masa máxima M (en kg) que puede soportar una estantería de un cierto ancho, de alto d m y largo L m, se modela mediante la expresión, $M = \frac{150d + 120}{L^2}$.
Si un comerciante ha instalado en su negocio una estantería de este tipo, con un alto de 3 cm y un largo de 2 m, según este modelo, ¿cuántas cajas de 6 kilos como máximo podrá poner en esta estantería?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7

46. Un estudio científico ha determinado que la luminosidad del sol al ingresar a un cierto lago disminuye a razón de un 10% cada 2 metros. Si la luminosidad del sol en la superficie del lago es A vatios, entonces la función que modela la luminosidad que habrá a los n metros de profundidad, medida en vatios (W) es

A) $(0,9)^{2n} \cdot A$

B) $(0,9)^{n} \cdot A$

C) $(0,9)^{\frac{n}{2}} \cdot A$

D) $(0,9) \cdot \frac{n}{2} \cdot A$

47. El rendimiento de un vehículo en ciudad es 9 km/L y en carretera es de 12 km/L, ¿cuál de estas funciones modela la cantidad de litros que se consume en un recorrido de x km, donde los primeros 36 los hizo en ciudad y el resto en carretera?

A) $f(x) = 7 - \frac{x}{12}$

B) $g(x) = 1 + \frac{x}{12}$

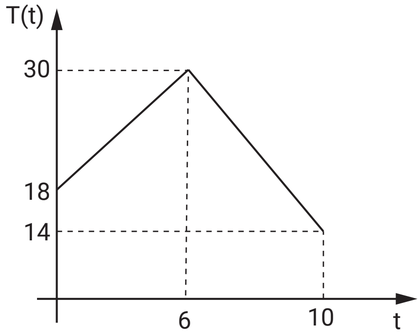
C) $h(x) = 4 + \frac{x}{12}$

D) $q(x) = \frac{1}{4} + \frac{12}{x - 36}$

48. En un peaje al sur del país, la cantidad total de vehículos C(t) que han pasado por él se ha modelado a través de la expresión $C(t) = \frac{4t^2 + 2}{2t}$ (medido en cientos de vehículos) siendo t es la cantidad de horas transcurridas desde que se inicia la medición (con $0 < t \leq 5$). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A las dos horas habían pasado por este peaje 450 vehículos.
B) A las tres horas habían pasado por este peaje más de 630 vehículos.
C) A las cuatro horas habían pasado por este peaje 825 vehículos.
D) Al término de la medición habían pasado menos de 1.000 vehículos por este peaje.

49. La temperatura T medida en grados Celcius (°C) de una habitación se modela a través de la función T(t) donde t es la cantidad de horas transcurridas desde el momento de inicio de la medición hasta las 10 horas transcurridas, siendo su gráfico el siguiente:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Durante las primeras seis horas, la temperatura subió 2 °C por hora.
B) La función que modela la temperatura es $T(t) = 54 - 4t$ si $6 \leq t \leq 10$.
C) Transcurridas 8 horas la temperatura será de 22 °C.
D) En un instante la temperatura será de 0 °C.

50. En una empresa, el costo de producir una cierta cantidad de artículos, comprende un costo fijo más un costo por cada artículo. Si se sabe que el costo de producir 20 artículos es $512.000 y el costo de producir 40 artículos es $524.000, ¿cuál de las siguientes funciones, modela el costo C(x) de producir **x** artículos?

A) $C(x) = 600x$
B) $C(x) = 500000x$
C) $C(x) = 500000 + 600x$
D) $C(x) = 600 + 500000x$

51. El nivel del agua en un estanque cilíndrico es de **h** metros y baja en forma continua **q** metros por hora, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La función que modela la altura H del agua en el estanque (en m) a las x horas es $H(x) = h - qx$.
B) La cantidad de horas que hay que esperar para que la altura baje a la mitad es $\frac{h}{2q}$.
C) Después de $\frac{h}{q}$ horas no habrá agua en el estanque.
D) Para que la altura original del agua se reduzca en un 10% hay que esperar $\frac{9h}{10q}$ horas.

52. Se tienen dos estanques A y B con agua, de modo que el estanque A tiene 5.000 litros y una bomba le extrae 200 litros por minuto, mientras que en estanque B hay 2.000 litros y una bomba le agrega 300 litros por minuto. Si las dos bombas se accionan simultáneamente, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 25 minutos el estanque A estará vacío.
B) A los 30 minutos el estanque B tendrá más de 10.000 litros.
C) Antes de los 6 minutos el estanque B tendrá más agua que el estanque A.
D) A los 6 minutos ambos estanques tendrán la misma cantidad de agua.

53. Un profesor ha utilizado una escala lineal para determinar la nota que obtiene un(a) alumno(a) según el puntaje logrado. Se sabe que un estudiante con 6 puntos obtuvo un 4,0 mientras que uno con 18 puntos obtiene un 7,0. Si el puntaje minimo es 0 puntos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Para obtener un 4,5 se deben obtener más de 8 puntos.
B) La nota mínima que puede obtener un estudiante es un 2,5.
C) Para obtener sobre un 5,0, se debe tener más de 10 puntos.
D) Si un estudiante quiere obtener un 6,0 debe tener 14 puntos.

54. Si f es una función definida en los reales tal que $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x - 1$, entonces $f(x + 1) =$

A) $2x - 2$
B) $2x + 1$
C) $2x$
D) $2x - 1$

9

55. Sea f una función definida en los reales mediante $f\left(\dfrac{x-5}{1-x}\right) = x + 1$, entonces f(3) =

A) −3
B) −2
C) 3
D) 2

56. Sea f una función definida en los reales mediante $f\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = x + 2$, entonces ¿cuál es la preimagen del 3?

A) -2
B) 1
C) 0
D) $-\dfrac{1}{2}$

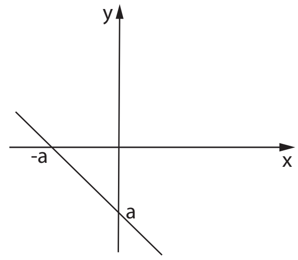
57. Sea f una función definida en los reales, mediante f(x + 2) = 2f(x) + 3, Si f(8) = 61, entonces f(4) =

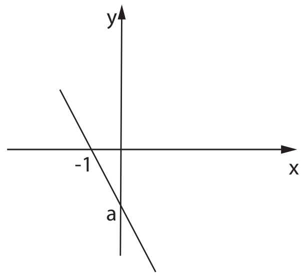
A) 3
B) 5
C) 6,5
D) 13

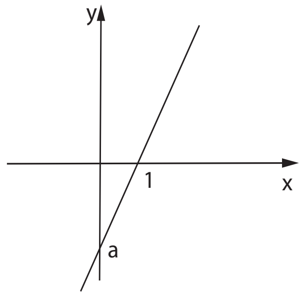
58. Una compañía distribuidora de energía eléctrica cobra a sus clientes un cargo fijo de $1.000 más $60 por cada kWh de consumo, pero si en los meses de invierno se supera los 150 kWh de consumo se cobra un adicional de $40 por cada kWh que supere ese límite.
¿Cuál de las siguientes funciones modela la tarifa a cancelar en invierno por x kWh de consumo, si x > 150?

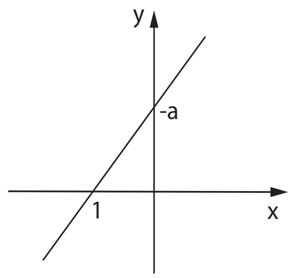
A) $f(x) = 1.000 + (150 \cdot 60) + 40x$
B) $g(x) = 1.000 + (150 \cdot 60) + 100x$
C) $h(x) = 1.000 + 100x$
D) $m(x) = 1.000 + (150 \cdot 60) + 100(x - 150)$

59. El gráfico de la función f, definida en los reales, mediante $f(x) = -ax + a$, con $a < 0$, es

A) 

B) 

C) 

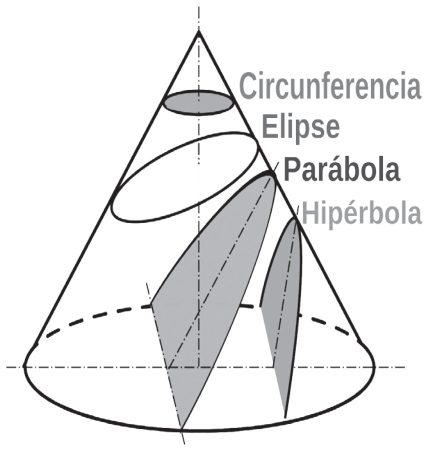
D) 

60. Sean las funciones f y g definidas en los reales mediante $f(x) = kx$, $g(x) = (k - 1)x + k$ con k una constante distinta de cero. ¿En qué punto se intersectan las gráficas de ambas funciones?

A) $(0, 0)$
B) (k, k^2)
C) (k^2, k)
D) $(1, k)$

Capítulo 10

FUNCIÓN CUADRÁTICA



Apolonio de Perga, (262 a.C? - 190 a.C?), en su gran obra, conocida como "Las Cónicas", realizó un amplio estudio acerca de las curvas que se originan al cortar un cono por un plano, estas curvas se denominan secciones cónicas, que pueden ser un círculo, una elipse, una parábola y una hipérbola.
En este capítulo estudiaremos particularmente las parábolas, que son las curvas que resultan al graficar funciones cuadráticas.

CONCEPTOS CLAVES

- Función cuadrática
- Forma canónica
- Intersecciones con los ejes
- Máximo y mínimo
- Eje de simetría y vértice
- Relación entre los coeficientes de la función cuadrática y el gráfico

GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a,b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) y su gráfica es una parábola.

- **Concavidad**

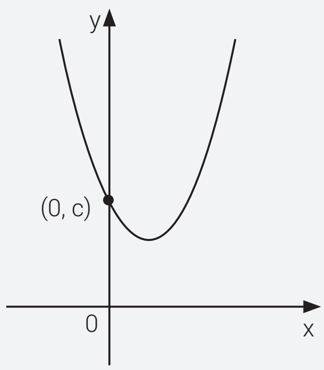
Las ramas de la parábola se abren hacia arriba o hacia abajo, dependiendo si el signo de a es positivo o negativo:

$a > 0$
las ramas se abren hacia arriba

$a < 0$
las ramas se abren hacia abajo

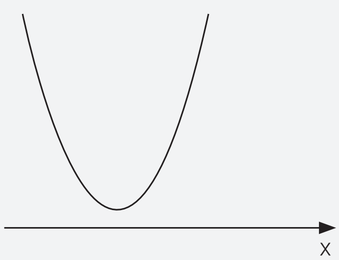
- **Intersección con eje y**

La intersección de la gráfica con el eje y es el punto (0,c):

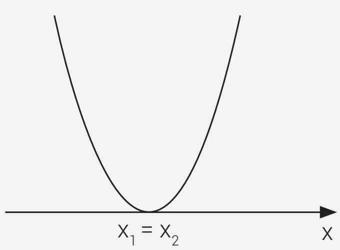


- **Intersección con eje x**

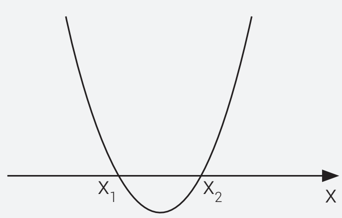
Las intersecciones de la gráfica de la función cuadrática, llamados ceros de la función, corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada a la función, estos pueden ser dos, uno o ninguno, dependiendo del signo del discriminante, como lo habíamos visto anteriormente.



$b^2 - 4ac < 0$
La parábola no intersecta al eje x



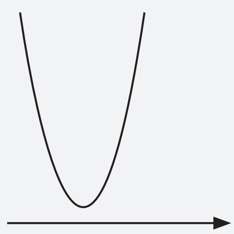
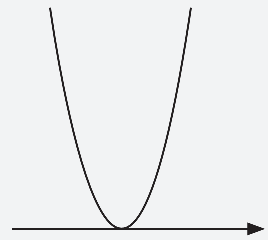
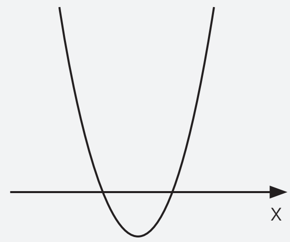
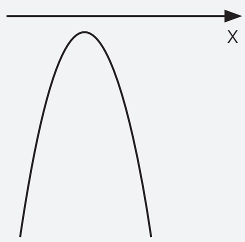
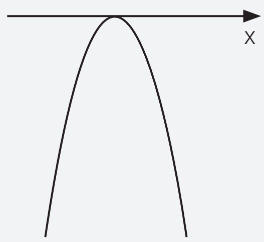
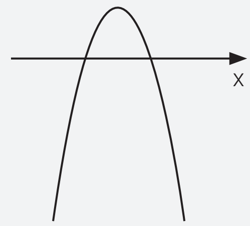
$b^2 - 4ac = 0$
La parábola es tangente al eje x



$b^2 - 4ac > 0$
La parábola intersecta al eje x en dos puntos

10

Considerando el signo del coeficiente cuadrático y del discriminante, tenemos entonces los siguientes casos:

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

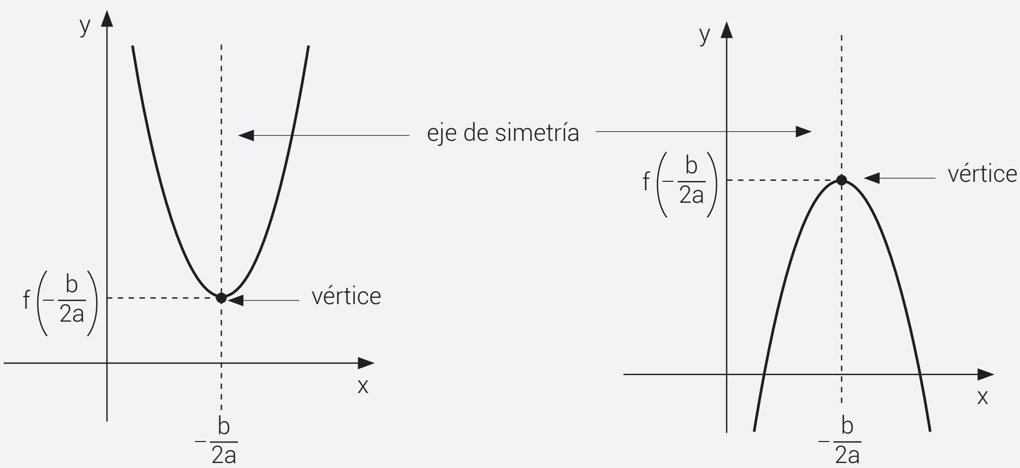
- **Vértice y eje de simetría**

El vértice es el punto más bajo en la gráfica cuando $a > 0$ y es el punto más alto cuando $a < 0$.

La abscisa del vértice corresponde a $x = -\dfrac{b}{2a}$ y su ordenada se puede calcular mediante

$y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, o bien $y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

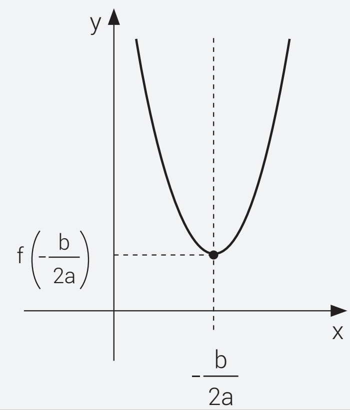
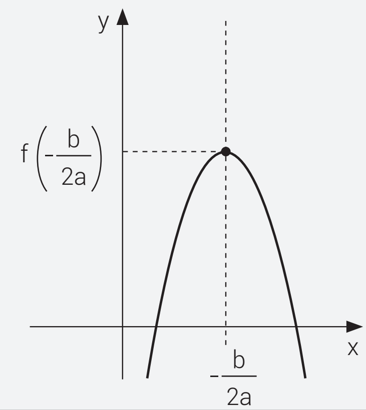
El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y, su ecuación es $x = -\dfrac{b}{2a}$.



10

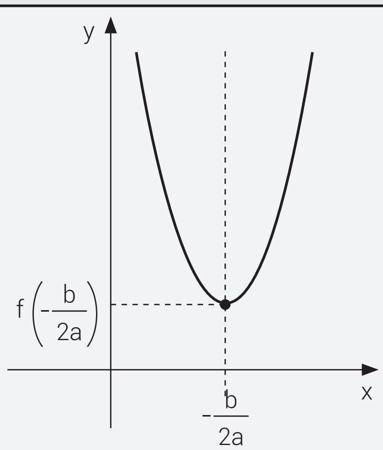
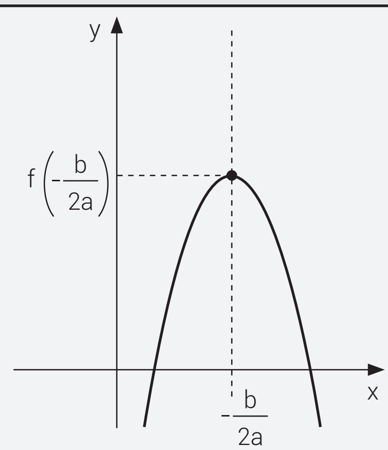
- **Máximo o mínimo**

Tanto el mínimo como el máximo de la función cuadrática se encuentran en el vértice, pero habrá un mínimo cuando a > 0 y un máximo cuando a < 0.

Caso a>0	Caso a<0
	
Acá la función tiene un mínimo y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac - b^2}{4a}$	Acá la función tiene un máximo y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac - b^2}{4a}$

- **Dominio y Recorrido**

El dominio de la función y = f(x) corresponde al conjunto de todos los valores de x y el recorrido corresponde a todos los valores de las imágenes.
El dominio de una función cuadrática corresponde al conjunto de los reales, Dom f = $\mathbb{R}$.
Mientras que el recorrido de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, depende del signo de a:

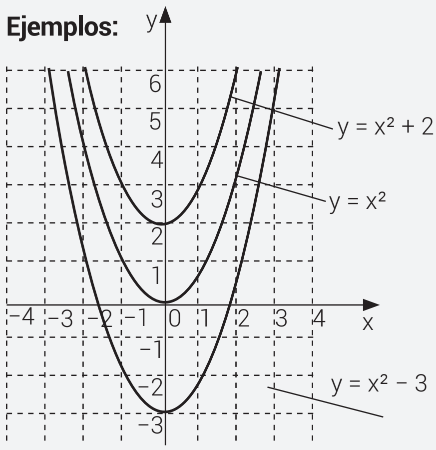
Caso a>0	Caso a<0
	
Recorrido: $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty\right[$	Recorrido: $\left]-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$

TRASLACIONES A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

- **Traslación vertical**

Si a una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia arriba y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia abajo.

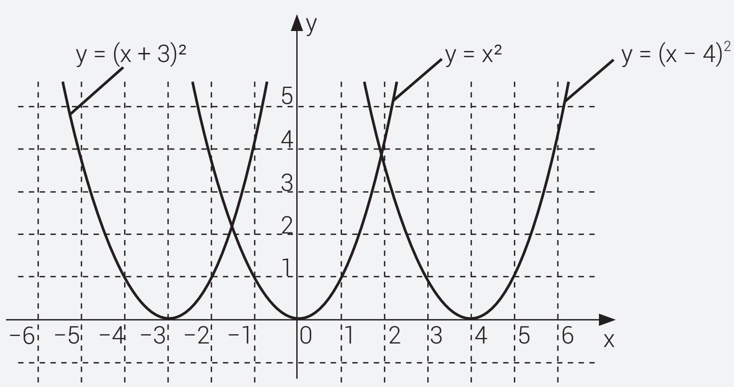
Ejemplos:



- **Traslación horizontal**

Si a la variable "x" de una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia la izquierda y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia la derecha.

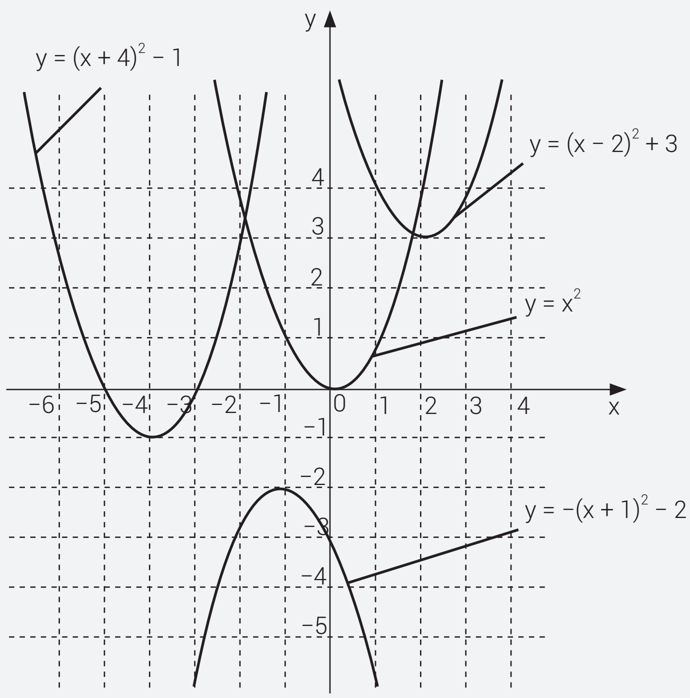
Ejemplos:



FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática de la forma: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ se denomina la forma canónica de una función cuadrática. Por lo visto anteriormente, si h y k son números reales positivos entonces la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ corresponde al gráfico de $f(x) = ax^2$ trasladado "h" unidades la derecha y "k" unidades hacia arriba.

Ejemplos:



ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:
- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = -x^2 + 6x - 9$, con respecto a la gráfica de esta función, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Intercepta al eje x en un solo punto.
B) Su vértice es el punto (3, 0).
C) Pasa por el punto (2, -1).
D) Intercepta al eje y en el punto (-9, 0)

Solución:

Para determinar en cuántos puntos la parábola intercepta al eje x calculamos el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, en este caso $\Delta = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot -9 = 36 - 36 = 0$, como $\Delta = 0$, la parábola intersecta al eje x en un solo punto, luego A) es verdadera.

Para calcular el vértice, utilizamos que la abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a}$, en este caso $x = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3$, reemplazando en la función, obtenemos: $f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0$, luego el vértice es el punto (3, 0), por lo tanto B) es verdadera.

Para C) reemplazamos x = 2 en la función, $f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = -4 + 12 - 9 = -1$, luego C) es verdadera.

Para D) consideremos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersecta al eje y en el punto (0, c) en este caso sería (0, -9) y no (-9, 0), luego D) es falsa.

2. Sea la función definida en los reales mediante $f(x) = -(x - 3)^2 + 6$, con respecto a su gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Su vértice es el punto (-3, 6).
B) Pasa por el punto (2, 7).
C) Intercepta al eje y en el punto (0, 6).
D) Intercepta al eje x en dos puntos.

Solución:

Notemos que la función está en su forma canónica: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde (h, k) es el vértice de la gráfica de esta función, en este caso h = 3 y k = 6, luego el vértice es el punto (3, 6), luego A) es falsa.

Para B) reemplacemos x = 2 en la función, $f(2) = -(2 - 3)^2 + 6 = 5$, según lo que indica esta alternativa $f(2) = 7$, luego es falsa.

En C) si desarrollamos la expresión $-(x - 3)^2 + 6$, obtenemos $-x^2 + 6x - 3$, como c = -3, la gráfica de función cuadrática intercepta al eje y en el (0 , -3), luego esta alternativa es falsa.

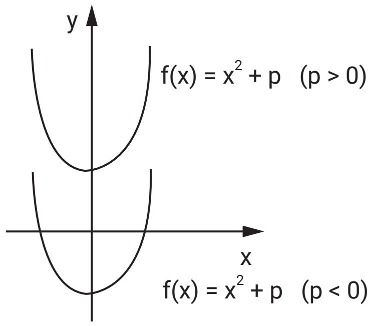
Para la alternativa D) determinemos el signo de la expresión $b^2 - 4ac$ (el discriminante), para ello ocupamos la expresión desarrollada: $-x^2 + 6x - 3$, tenemos que $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot -3 = 36 - 12 = 24$, como el discriminante es positivo, la gráfica intersecta al eje x en dos puntos, luego es verdadera.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la gráfica de la función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 + p$, con $p \neq 0$?

A) Su vértice está en el eje y.
B) Si $p > 0$, no intersecta al eje x.
C) Si $p < 0$, el discriminante asociado a esta función es positivo.
D) Podría ser tangente al eje x.

Solución:

Sabemos que el gráfico de $f(x) = x^2 + p$, corresponde a la gráfica de $g(x) = x^2$, desplazada "p" unidades hacia arriba o hacia abajo dependiendo si p es positivo o negativo respectivamente:



Observa que en ambos casos el vértice está en el eje y, por lo tanto A) es verdadera.
En el caso en que $p > 0$, se obtendría la parábola que está sobre el eje x (ver fig. anterior), por lo tanto no intersectaría al eje x, luego B) es verdadera.
Si $p < 0$, se obtendría la parábola cuyo vértice está bajo el eje x (ver fig.) luego intersectaría en 2 puntos al eje x, por lo tanto el discriminante es positivo, C) es verdadera.
Por último la alternativa D) es falsa, ya que la única forma de que la gráfica de la función $f(x) = x^2 + p$ sea tangente al eje x es que sea de la forma $f(x) = x^2$ y esto ocurre cuando $p = 0$, lo que es imposible, ya que se indica que $p \neq 0$.

10

4. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba, la función que modela la altura h(t) que alcanza a los t segundos de ser lanzado es $h(t) = 40t - 5t^2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 3 segundos alcanza una altura de 75 m.
B) A los 8 segundos el proyectil llega al suelo.
C) La máxima altura la alcanza a los 4 s.
D) La máxima altura es inferior a los 80 m.

Solución:

En A) calculamos h(3), lo que nos da $h(3) = 40 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 120 - 45 = 75$ m, luego es verdadera.
En B) calculamos h(8), obteniendo $h(8) = 40 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 0$ m, como la altura a los 8 s es cero, es verdadera.

Como la función dada es cuadrática, gráficamente la máxima altura se encuentra en el tiempo que corresponde al vértice, como la abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a}$, en este caso: $t = \frac{-40}{2 \cdot -5} = 4$, por lo que efectivamente la máxima altura ocurre a los 4 s de ser lanzado el proyectil, luego C) es verdadera.

Para hallar la altura máxima reemplazamos el tiempo hallado en C) en la función:
$h(4) = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 80$ m, luego la máxima altura es 80 m y no es inferior a 80 m, luego D) es falsa.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, su gráfica intercepta al eje de las abscisas en un solo punto?

A) $f(x) = x^2 – 5x + 6$
B) $g(x) = 2x^2 – 2x + 3$
C) $h(x) = 4x^2 – 12x + 9$
D) $m(x) = 9x^2 – 6x + 3$

2. Sea la función $f(x) = -x^2 + 6x + 16$, definida en los reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Su gráfica intercepta al eje y en el (0,16).
B) Su gráfica intercepta al eje x en dos puntos.
C) La función tiene un mínimo.
D) Su vértice es el punto (3, 25).

3. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, su gráfica tiene como vértice el punto (1, 4)?

A) $f(x) = -(x – 1)^2 + 2$
B) $f(x) = -(x – 1)^2 + 4$
C) $f(x) = (2x – 1)^2$
D) $f(x) = 4(x – 2)^2 – 9$

4. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, su vértice **NO** está en uno de los ejes coordenados?

A) $f(x) = -2x^2 + 5$
B) $g(x) = 3(x – 2)^2$
C) $h(x) = 4x^2$
D) $j(x) = -4(x – 3)^2 + 1$

5. ¿Cuál de las siguientes funciones cuadráticas definidas en los números reales, su gráfica tiene como vértice el punto (3, 1) y pasa por el punto (4, 3)?

A) $f(x) = -2x^2 + 12x – 17$
B) $g(x) = x^2 – 6x + 11$
C) $h(x) = 2x^2 – 12x + 19$
D) $j(x) = x^2 – 6x + 10$

6. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = -2(x - 3)(x - 5)$, entonces las coordenadas del vértice de la parábola asociada a su gráfica son

A) $(4, -2)$
B) $(4, 2)$
C) $(4, -1)$
D) $(4, 1)$

7. ¿Cuál de las siguientes funciones cuadráticas, definida en los reales, tiene como mínimo el -2 y su gráfico intercepta al eje de las abscisas en los puntos (5, 0) y el (7, 0)?

A) $f(x) = x^2 - 12x + 35$

B) $g(x) = 2x^2 - 24x + 70$

C) $h(x) = -2x^2 + 24x - 70$

D) $r(x) = -\frac{2}{35}x^2 + \frac{24}{35}x - 2$

8. La profesora de matemática de Ximena, le pide que de la función f definida en los reales, $f(x) = (x - 3)^2 - 2$, obtenga todas las preimágenes del 14, para ello, Ximena realiza los siguientes pasos:

$$f(x) = (x - 3)^2 - 2$$

Paso 1

$$(x - 3)^2 - 2 = 14$$

Paso 2

$$(x - 3)^2 = 16$$

Paso 3

$$x - 3 = 4$$

Paso 4

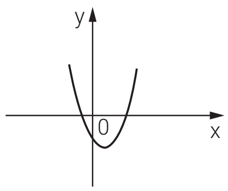
$$x = 7$$

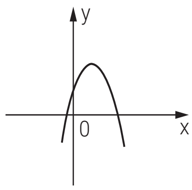
La preimagen es 7

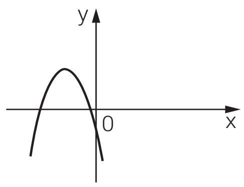
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

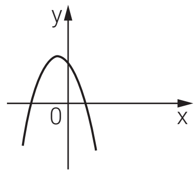
A) Cometió un error en el paso 1.
B) Cometió un error en el paso 2.
C) Cometió un error en el paso 3.
D) Cometió un error en el paso 4.

9. ¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder a la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x + 5$?

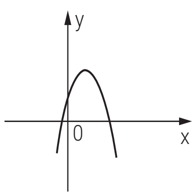
A) 

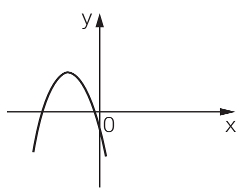
B) 

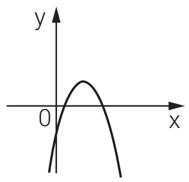
C) 

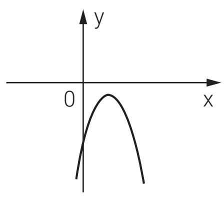
D) 

10. ¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder a la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 + x - 5$?

A) 

B) 

C) 

D) 

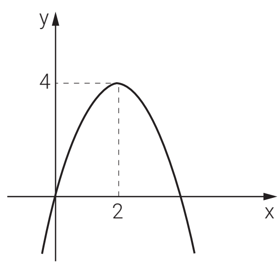
11. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene la siguiente gráfica?

A) $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$

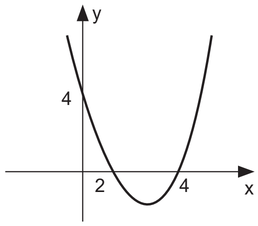
B) $g(x) = -2(x - 2)^2 + 8$

C) $h(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4$

D) $j(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$



12. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como gráfico la parábola de la figura?



A) $g(x) = (x - 3)^2 - 1$

B) $j(x) = (x - 3)^2 + 2$

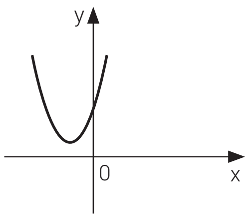
C) $k(x) = 2(x - 2)(x - 4)$

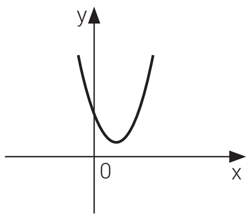
D) $m(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$

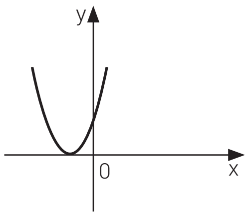
13. La gráfica de la función f definida en los reales mediante $f(x) = x^2 + a$, pasa por el punto (a, 2), entonces el (los) valor(es) de a es (son):

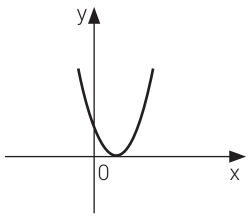
A) Solo 1
B) Solo −1
C) −2 o 1
D) Solo −2

14. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función cuadrática: $y = x^2 - 6x + 9$?

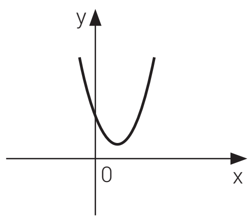
A)


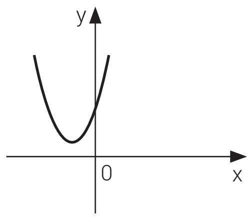
B)


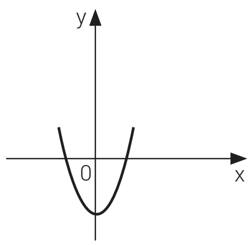
C)


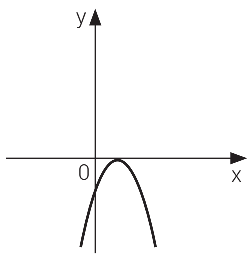
D)


15. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función: $f(x) = (x + 2)^2 + 1$?

A) 

B) 

C) 

D) 

16. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = -2(x - 2)^2 + 18$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La gráfica intersecta al eje x en dos puntos.
B) La gráfica intersecta al eje y en el punto (0,18).
C) La preimagen del 10 según f son 0 y 4.
D) Si $-1 < x < 5$, entonces $f(x) > 0$.

17. Sea la función definida en los reales mediante $f(x) = -\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 9$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la gráfica de esta función?

A) Su vértice es el punto $\left(\frac{1}{5}, 9\right)$.

B) La función tiene un mínimo.

C) Corta al eje x en dos puntos.

D) Pasa por el punto $\left(\frac{11}{5}, 5\right)$.

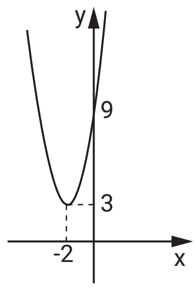
18. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales tiene la gráfica que se muestra a continuación?

A) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 9$

B) $f(x) = \frac{3}{2}(x + 2)^2$

C) $f(x) = \frac{3}{2}(x + 2)^2 + 9$

D) $f(x) = \frac{3}{2}(x + 2)^2 + 3$



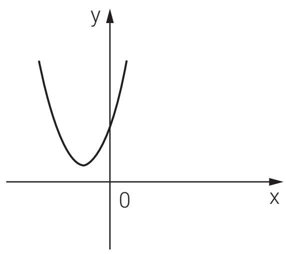
19. El gráfico de la figura, corresponde a la de la función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - px - r$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $r < 0$

B) $p^2 + 4r < 0$

C) $p > 0$

D) $x^2 - px - r > 0$, para todo x real.



20. Sea la función $f(x) = 2(x - p)^2 + q$, definida en los reales, con p y q constantes distintas de cero. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Su gráfica tiene como vértice el punto (p, q).
B) El recorrido es el intervalo $[q, \infty[$
C) El mínimo de la función es y = q.
D) La gráfica intersecta al eje y en el punto (0, q).

21. ¿Cuál de las siguientes funciones definida en los reales positivos **NO** corresponde a una función cuadrática?

A) Área de un triángulo equilátero en términos de la longitud de su lado.
B) Área de un rectángulo de perímetro constante en términos de su largo.
C) Área de un hexágono regular en términos de la longitud de su lado.
D) La variación del área de una circunferencia cuando su radio aumenta en 2 unidades en términos de su radio.

22. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = ax^2 + (a + 2)x + 2$, con $a \neq 0$. ¿Cuál de las siguientes relaciones se debe cumplir, para que la gráfica de la función intersecte al eje x en un solo punto?

A) $a = -2$

B) $a = 2$

C) $a^2 - 4a + 4 > 0$

D) $a^2 - 4a + 4 < 0$

23. ¿Cuál es el conjunto de todos los valores de a, para que la gráfica de la función definida por $f(x) = (x - a)^2 + 4a$, intersecte al eje x en dos puntos?

A) $]0, \infty[$

B) $]-\infty, 0[$

C) $]-\infty,0]$

D) $[0, \infty[$

24. La gráfica de la función $f(x) = (a - 2)x^2 + 2(a - 1)x + a - 1$, con $a \neq 2$ y dominio los números reales, intersecta en dos puntos al eje x, si

A) $a < 1$

B) $a = 1$

C) $a > 1$

D) $a > 2$

25. ¿Para qué valores de k, la gráfica de la función f definida en los reales, mediante $f(x) = x^2 - (k + 3)x + k^2$, es tangente al eje x?

A) Solo para el 1.

B) Solo para el -1.

C) Solo para el 3.

D) Solo para el 3 y el -1.

26. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - 4bx - 2$, con $b \neq 0$, entonces el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es

A) $2b$

B) $-2b$

C) $4b^2 + 2$

D) $-4b^2 - 2$

27. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la función $f(x) = -(x^2 + 4)$ si el dominio son todos los números reales?

A) La gráfica no intersecta al eje x.

B) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje y.

C) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje x.

D) Su gráfica tiene al eje y como eje de simetría.

28. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como recorrido los reales menores o iguales que -1?

A) $g(x) = (x - 3)^2 - 1$

B) $h(x) = -(x - 3)^2 + 1$

C) $k(x) = -(x - 1)^2 - 2$

D) $t(x) = -(x - 4)^2 - 1$

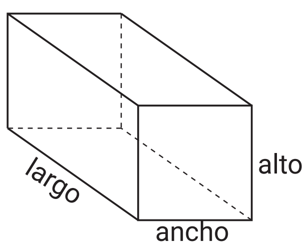
29. Se tiene una paquete de margarina cuya forma es de un paralelepipedo de base rectangular, el largo mide tres cm más que el ancho y el alto mide un cm más que el ancho, posteriormente se modifica el envase de tal forma que el largo disminuye en 2 cm, el ancho aumenta en 2 cm y el alto disminuye en 1 cm, ¿cuál de las siguientes funciones definidas en los reales positivos determina la variación positiva del volumen de este envase en términos del ancho "x" del envase original?

A) $f(x) = x^2 + x$

B) $g(x) = x^2 + 3x + 2$

C) $h(x) = x^2 + 5x + 6$

D) $j(x) = 3x^2 + 6x$



30. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - ax + 6$, con $a \neq 0$.
Si el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es −2, entonces a =

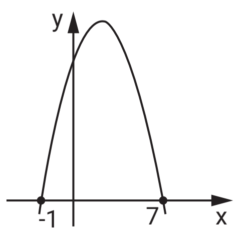
A) 4
B) −8
C) −4
D) 4 o −4

31. ¿En cuál de las siguientes funciones definidas en los números reales, su gráfica **NO** intercepta al eje de las abscisas?

A) $f(x) = -(x - 3)^2$
B) $g(x) = -(x - 2)^2 + 1$
C) $h(x) = (x - 3)^2 + 1$
D) $j(x) = (x - 3)^2 - 2$

32. La gráfica representa a la gráfica de la función cuadrática f definida en los reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si $a > b > 3$, entonces $f(a) < f(b)$.
B) Si $a < b < 3$, entonces $f(a) < f(b)$.
C) $f(3 - a) = f(a + 3)$.
D) Si $-1 < x < 7$, entonces $f(x) < 0$.

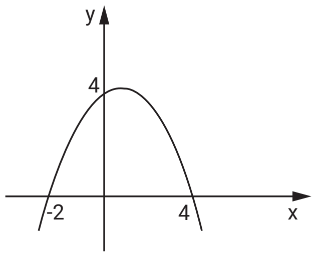


33. ¿En cuál de las siguientes funciones definidas en los reales se cumple que $f(2 + t) = f(2 - t)$, para todo número real t?

A) $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$
B) $g(x) = -(x + 2)^2 - 4$
C) $h(x) = -x^2 + 2$
D) $j(x) = x^2 - 2$

10

34. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales tiene el gráfico que se muestra a continuación?



A) $f(x) = (x + 2)(x - 4)$

B) $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 4)$

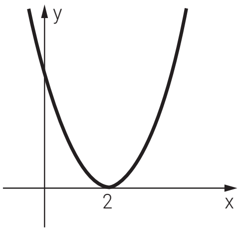
C) $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

D) $j(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)(x + 4)$

35. Sea f una función definida en los reales, mediante $f(x) = -x^2 + p$, con $p > 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si $a < b < 0$, entonces $f(a) < f(b)$.
B) Si $-\sqrt{p} < x < \sqrt{p}$, entonces $f(x) > 0$.
C) Para todo valor real de x, $f(x) \leq p$.
D) Si $a < 0 < b$, entonces $f(a) < f(b)$.

36. La función g, definida en los reales mediante $g(x) = x^2 - ax + b$, cuya gráfica es la siguiente:
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) $a = b$
B) La gráfica intersecta al eje y en el (0,a).
C) El mínimo de la función es $y = 0$.
D) El recorrido de la función son los reales positivos.

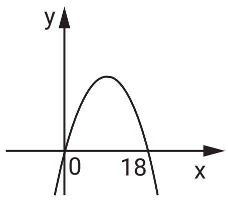
37. La distancia d(t) que recorre un móvil que se desplaza con aceleración constante, está dada por la función definida en los reales positivos, $d(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, donde v_0 es la rapidez inicial (medida en m/s) , a es la aceleración (medida en m/s^2) y t es el tiempo (medido en s).
Si en un cierto trayecto la rapidez inicial de un móvil es 20 m/s y su aceleración se mantiene constante a 40 m/s^2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

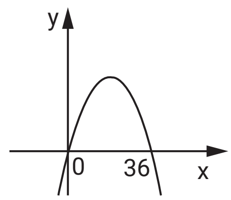
A) A los 2 s habrá recorrido menos de 100 m.
B) A los 4 s alcanza una distancia de 400 m.
C) A los 5 s alcanza una distancia superior a los 600 m.
D) A los 6 s alcanza una distancia superior a los 900 m.

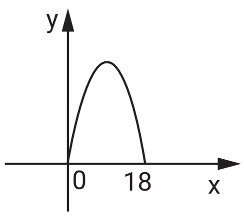
38. Se tiene un cuadrilátero de ángulos rectos, de perímetro 36 cm, ¿cuál de las siguientes funciones modela el área A(x) de este cuadrilátero en términos de su ancho "x"?

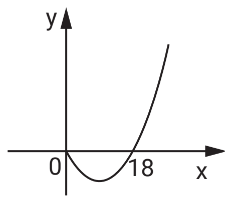
A) $A(x) = -x^2 - 18x$
B) $A(x) = -x^2 + 18x$
C) $A(x) = -x^2 + 36x$
D) $A(x) = -x^2 - 36x$

39. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor a la función A(x) del ejercicio anterior?

A) 

B) 

C) 

D) 

40. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba y la altura h(t) que alcanza a los "t" segundos de ser lanzado se modela con la función $h(t) = 20t - 5t^2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Al segundo de ser lanzado alcanza una altura de 15 m.
B) Al segundo y a los 3 segundos alcanza la misma altura.
C) A los 8 s el proyectil llega al suelo.
D) La máxima altura que alcanza el proyectil es 20 m.

41. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - bx$, con $b < 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Su vértice está en el cuarto cuadrante.
B) Su gráfica corta al eje x en el (-b, 0).
C) Si $b < x < 0$, entonces $f(x) < 0$.
D) Si $x < 0$, entonces $f(x) > 0$.

42. La siguiente tabla de valores corresponde a la función cuadrática definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + bx$:

x	f(x)
2	8
-1	-1
0	0

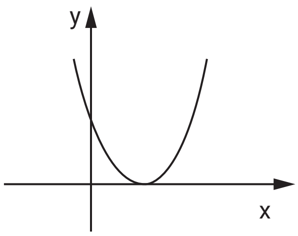
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

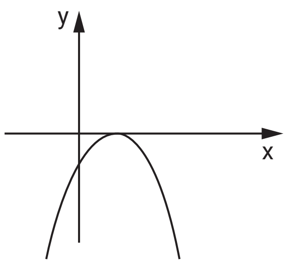
A) Su vértice tiene como coordenadas uno de los pares ordenados que aparecen en la tabla.
B) Su gráfica corta al eje de las abscisas en el (-2, 0).
C) Su gráfica pasa por el (-3, 3).
D) Para todo real x, $f(x) > -1$.

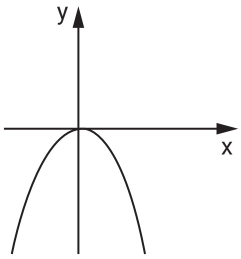
43. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + c$, con $a \neq 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

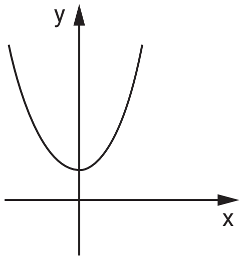
A) Su gráfica tiene al eje de las ordenadas como eje de simetría.
B) Su vértice está en el eje de las ordenadas.
C) Si $c < 0$, la gráfica corta al eje de las abscisas.
D) Si $ac > 0$, no corta al eje de las abscisas.

44. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = x^2 - px + r$ con $p^2 = 4r$, ¿cuál de las siguientes gráficos podría corresponder a esta función?

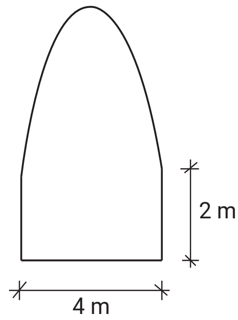
A) 

B) 

C) 

D) 

45. En la figura se muestra un arco, el cual se ha construido de modo que hasta los 2 metros de altura sus paredes son verticales y sobre estas paredes se ha montado un arco parabólico donde la función que modela el interior del arco es $f(x) = -2x^2$, ¿cuál es la altura máxima de este arco?

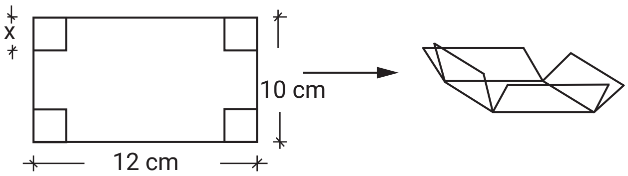


A) 6 m
B) 8 m
C) 10 m
D) 34 m

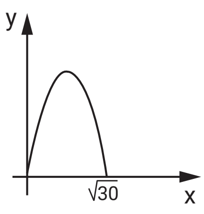
46. Se va a construir un envase de aluminio sin tapa de forma cilindríca para colocar bombones en su interior. Si la altura mide un cm más que el radio basal "x", si se aproxima π a 3, ¿cuál de las siguientes funciones definidas en los reales positivos modela la cantidad de cm^2 de aluminio que se requieren para fabricar este envase?

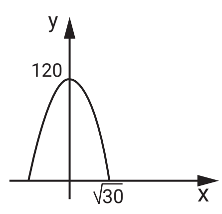
A) $f(x) = 12x^2 + 6x$
B) $f(x) = 9x^2 + 6x$
C) $f(x) = 12x^2$
D) $f(x) = 3x^3 + 3x^2$

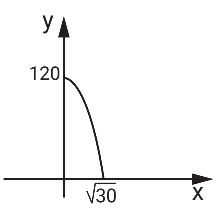
47. A un pedazo de cartulina de forma rectangular cuyas dimensiones se muestran en la figura, se recortan en sus cuatro esquinas cuadrados de lado "x" cm, con el material sobrante se forma la caja que se muestra en la derecha:

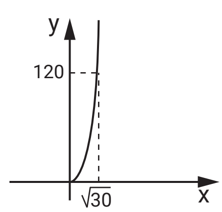


¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función que modela el área de la caja en términos de "x"?

A) 

B) 

C) 

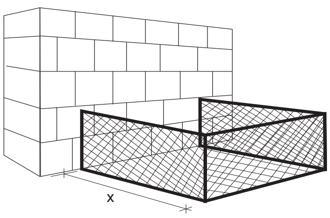
D) 

48. Debido a la caza indiscriminada de guanacos en ciertos sectores en el norte del país, una fundación destinada a la preservación de especies, ha realizado un estudio de la población de esta especie en un cierto sector. Para ello se ha obtenido el modelo, $P(t) = -25t^2 + 500t$, el cual indica la población en un cierto periodo de tiempo, donde t es la cantidad de años transcurridos donde se inició la medición, con $0 < t \leq 20$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Antes de los 10 años la población de guanacos iba en aumento.
B) A los 10 años la población alcanzó su máximo.
C) A los 11 años la población de guanacos era menor que a los 9 años
D) La población máxima fue de 2.500 guanacos.

49. Una reja cuya base es un cuadrilátero de ángulos rectos, se ocupará para encerrar unas aves. Si la reja tiene tres lados, una longitud de 40 m y se apoya sobre una pared tal como se muestra en la figura, ¿cuál es la función definida en los reales positivos que modela el área (medida en m^2) que encierra esta reja en términos de su ancho "x"?

A) $f(x) = 40x - x^2$
B) $f(x) = 20x - x^2$
C) $f(x) = 40x - 2x^2$
D) $f(x) = 20x - 2x^2$



50. La temperatura de una habitación T(t) medida en °C, se ha modelado con la función $T(t)= -\frac{4}{5}t^2 + 8t + 12$, con t la cantidad de horas transcurridas desde mediodía, con $0 < t \leq 4$.
Juan es un técnico en aire acondicionado y utilizará este modelo para determinar la temperatura máxima de la habitación, para ello sigue los siguientes pasos:

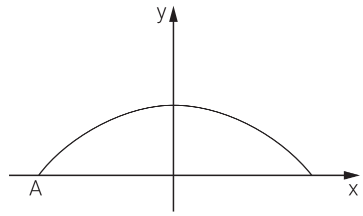
(1) Cálculo de la abscisa del vértice
Calcula la abscisa del vértice de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, utilizando que $x_v = -\frac{b}{2a}$, reemplazando se obtiene: $x_v = \frac{-8}{2 \cdot \frac{-4}{5}} = 5$, por lo que para t = 5 la función alcanza su máximo.

(2) Cálculo del máximo de la función
Ahora reemplaza t = 5, en la función que modela la temperatura: $T(5) = -\frac{4}{5} \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 + 12 = 32$ °C.

(3) Interpretación de los resultados
Como el modelo se aplica desde las 12 A.M., y la temperatura máxima se alzanza para t = 5, entonces sumamos 5 horas a las 12 A.M., por lo que se deduce que a las 5 P.M. se obtendrá la temperatura máxima, la cual será de 32 °C.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Juan se equivocó en (1).
B) Juan se equivocó en (2).
C) Juan se equivocó en (3).
D) Juan no cometió errores.

51. Raúl está regando su jardín, en la figura, se ha representado el chorro de agua que sale de la manguera. Si Raúl está ubicado en el punto A, y la función que modela la altura h del chorro de agua, hasta que llega al suelo es $h(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 4$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El chorro llega a 20 metros donde está Raúl.
B) La máxima altura que alcanza el chorro es de 4 metros.
C) El modelo se ajusta solo para $-10 \leq x \leq 10$.
D) A un metro de Raúl, en la dirección del chorro, la altura que alcanza este es $\frac{24}{25}$ m.

52. Para un estudio acerca de la cantidad de vehículos que pasa por un pórtico de un telepeaje entre las 7 y las 8 de la mañana, se ha modelado que la cantidad C(t) de vehículos que pasa a los t minutos después de las 7 A.M. en un cierto día, está dado por $C(t) = 180 - \frac{1}{5}(t - 30)^2$, con $0 < t \leq 60$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

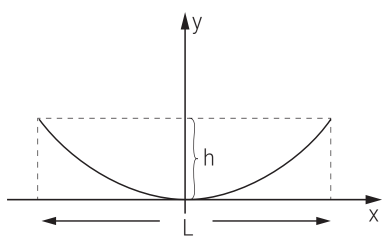
A) En el tiempo de estudio, a las 7:30 A.M. se alcanza el peak de vehículos.
B) Entre las 7 y 7:30 el flujo vehicular va en aumento.
C) El peak de vehículos que pasó por este pórtico durante ese dia fue de 180 vehículos.
D) A las 7:10 y a las 7:50 transitó la misma cantidad de vehículos por este pórtico.

53. Para un estudio acerca de la cantidad de vehículos que se estacionan en un aparcamiento en el centro de la ciudad, se ha determinado que en un cierto dia el número de vehículos N(t) estacionados a las t horas después de abrir el estacionamiento se puede modelar con la función $N(t) = -4t^2 + 48t + 52$. Si este modelo se aplica desde las 7 A.M. (hora de apertura del estacionamiento) hasta la hora de cierre, 8 P.M.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) En el momento de la apertura del estacionamiento ya había 52 vehículos estacionados.
B) A la 1 P.M. se produjo el peak de vehículos estacionados.
C) Hubo un instante en que la cantidad de vehículos estacionados fue superior a 200.
D) A la hora de cierre no había vehículos estacionados.

54. En la figura, se muestra la vista lateral de un puente de forma parabólica, el cual se ha modelado con la función $f(x) = \frac{1}{20}x^2$. Si la altura h del puente es 5 metros, entonces la longitud L del puente es

A) 5 m
B) 10 m
C) 20 m
D) 40 m



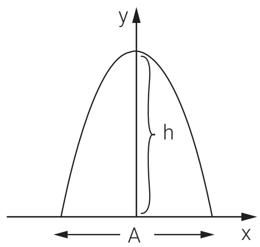
55. Laura quiere vender su casa, para estimar un precio de venta, ha hecho un estudio del precio de venta P(t) de propiedades similares a la suya, en el mismo sector, durante estos últimos 8 años. Este estudio, le ha permitido confeccionar el modelo $P(t) = 40t^2 – 240t + 2460$, donde t es el tiempo (en años), transcurridos desde el 2012. Según este estudio, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) En el año 2012 el precio de las viviendas era inferior a las 2500 UF.
B) Hasta el año 2015 el precio de las viviendas iba bajando.
C) El año 2020, las viviendas alcanzaron su precio máximo.
D) El precio mínimo de las viviendas fue superior a los 2100 UF.

56. La cantidad de kilos de azúcar vendidos C(t) en un supermercado de una comuna durante nueve meses se ha modelado con la función $C(t) = -6t^2 + 60t + 150$, donde t es la cantidad de meses que han transcurrido desde el mes de enero del año pasado, con $0 < t \leq 9$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El modelo se aplica desde el mes de enero del año pasado.
B) La mayor cantidad de azúcar vendida en un mes fue de 300 kilos.
C) En el último mes se vendieron 204 kilos.
D) En el mes de marzo se vendieron 246 kilos.

57. Un tunel tiene forma parabólica, tal como se muestra en la figura.
Si la función que modela la forma del interior del tunel se ha modelado con la función $f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 10$, donde las variables x e y están expresadas en metros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La altura "h" del tunel es de 10 metros.
B) La amplitud o luz "A" del tunel mide 4 metros.
C) A un metro del eje de simetría la altura del tunel es superior a los 9 m.
D) A dos metros del eje de simetría la altura disminuye en un 25%.

58. En un reserva protegida se ha hecho un estudio para determinar la evolución de la población de cebras y su depredador natural el león. La población de cebras se ha modelado con la función $C(t) = 10t^2 + 80t + 162$ y la de los leones es $L(t) = 160t + 2$, ambas medidas en decenas de ejemplares, donde t es el tiempo transcurrido en meses desde que se inició el estudio, con $0 \leq t \leq 20$.
Según estos modelos poblacionales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Al inicio del estudio había 20 leones.
B) Al final del estudio la población de leones será inferior a 32.000 ejemplares.
C) A los 4 meses ambas poblaciones tendrán igual cantidad de especies.
D) Ambas poblaciones crecen en el transcurso del tiempo.

10

59. Las ganancias de una empresa, medidas en millones de dólares, se modelan según la función cuadrática $G(t) = -\frac{6}{32}(t-9)^2 + 12$, donde t es la cantidad de años desde que fue inaugurada.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 9 años se obtuvo la máxima ganancia.
B) A los 8 y a los 10 años obtuvo la misma ganancia.
C) Después de los 9 años sus ganancias empezaron a disminuir.
D) La ganancia anual siempre fue inferior a 12 millones de dólares.

60. La altura h(t) alcanzada, medida en metros, de un proyectil se modela mediante la función $h(t) = 20t - 5t^2$, donde t es la cantidad de segundos que transcurren hasta que alcanza dicha altura. Con respecto al proyectil, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

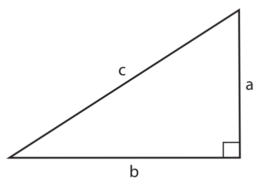
A) A los 4 segundos llega al suelo.
B) A los 2 segundos alcanza su altura máxima.
C) Al primer y tercer segundo después de ser lanzado alcanza la misma altura.
D) Su altura siempre es inferior a los 20 m.

Capítulo 11

ÁREAS, PERÍMETROS Y TEOREMA DE PITÁGORAS

El famoso matemático **Pitágoras de Samos** (580 a.c – 500 a.c), viaja a Egipto, Babilonia y la India, donde asimila una gran cantidad de conocimientos matemáticos, astronómicos e incluso religiosos. A su regreso, en el 540 a.c funda en Crotona una ciudad griega situada en Italia, en ella enseña a sus discípulos matemáticas, les inculca ideas metafísicas y la veneración de los números. A pesar de no haber ningún testimonio escrito, se le atribuye a él la demostración del teorema que lleva su nombre y relacionado con él, la regla para formar tríos pitagóricos: $\frac{m^2+1}{2}$, m, $\frac{m^2-1}{2}$, donde m es un número entero positivo impar.

La obsesión de Pitágoras por los números era tan grande que se le atribuye a él la máxima: "Las cosas son números".



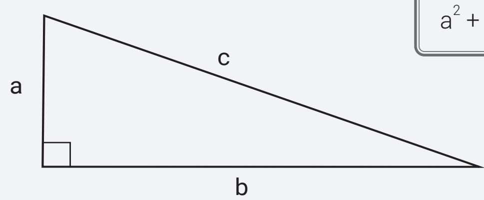
$c^2 = a^2 + b^2$

CONCEPTOS CLAVES

- Teorema de Pitágoras
- Perímetros de figuras planas
- Aplicaciones del teorema de Pitágoras
- Áreas de figuras planas

TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos equivale al cuadrado de la hipotenusa:



$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Nota: este teorema es en realidad el teorema particular de Pitágoras, ya que existe el teorema general de Pitágoras, que es válido para cualquier triángulo, pero no lo estudiaremos en el presente texto.

Hay que considerar que también es válido el recíproco del teorema de Pitágoras, esto es, si en un triángulo el cuadrado de la longitud lado mayor equivale a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros lados, entonces el triángulo es rectángulo.

TRIOS PITAGÓRICOS

Los tríos pitagóricos son ternas de números enteros positivos que cumplen que la suma de los cuadrados de los dos enores equivale al cuadrado del mayor.
Los tríos pitagóricos más importantes son los siguientes: 3 - 4 - 5, 5 - 12 - 13, 8 - 15 - 17, 7 - 24 - 25.
Además si amplificamos por números enteros positivos, obtenemos otros tríos pitagóricos:

$(3 , 4 , 5) \rightarrow (6 , 8 , 10) , (9 , 12 , 15) , (12 , 16 , 20),...$

Los triós pitagóricos corresponden a posibles longitudes de lados de un triángulo rectángulo, ya que satisfacen la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$.

Podemos determinar diversos trios pitagóricos a través de las expresiones:
$a = m^2 + n^2$, $b = m^2 - n^2$, $c = 2mn$.
Observa que si $m = 2$ y $n = 1$, obtenemos el trío 3 – 4 – 5.

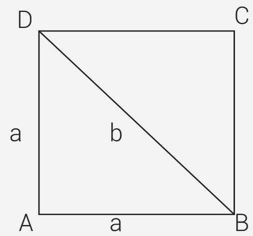
11

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Las aplicaciones del teorema particular de Pitágoras, son muy variadas aquí veremos sólo las más importantes:

- **Diagonal de un cuadrado**

La diagonal de un cuadrado equivale al lado del cuadrado multiplicado por $\sqrt{2}$



$d = a\sqrt{2}$

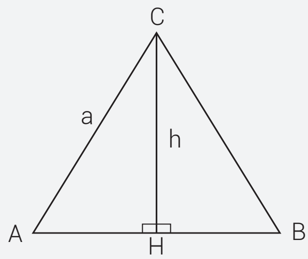
Demostración:
Si en el triángulo rectángulo ABD utilizamos el teorema particular de Pitágoras, se tiene que:

$a^2 + a^2 = d^2$.

$2a^2 = d^2$, si extraemos raíz cuadrada a ambos lados obtenemos lo pedido.

- **Altura de un triángulo equilátero**

La altura de un triángulo equilátero equivale a la mitad del lado multiplicado por $\sqrt{3}$.



$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Demostración:
Utilizando el teorema particular de Pitágoras en el ΔAHC (o en el ΔCHB):

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + h^2 = a^2 \quad /\cdot 4$$

$$a^2 + 4h^2 = 4a^2$$

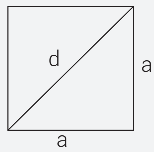
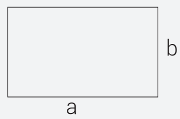
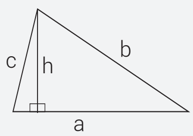
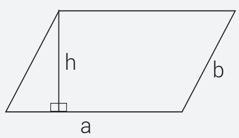
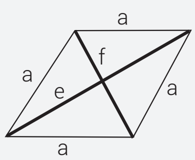
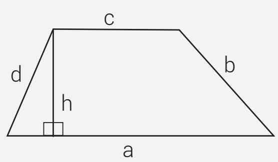
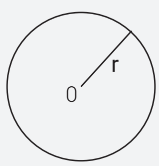
$$4h^2 = 3a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad /\sqrt{\ }$$

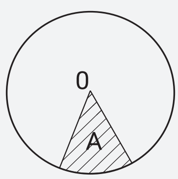
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

FÓRMULAS DE ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS

Fórmulas de áreas y perímetros

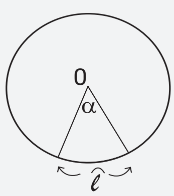
NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO	ÁREA
Cuadrado		$4a$	a^2 $\frac{d^2}{2}$
Rectángulo		$2a + 2b$	ab
Triángulo		$a + b + c$	$\frac{ah}{2}$
Romboide		$2a + 2b$	ah
Rombo		$4a$	$\frac{ef}{2}$
Trapecio		$a + b + c + d$	$\left(\frac{a+c}{2}\right)h$
Círculo		$2\pi r$	πr^2

Área de sector circular



$$A = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi r^2$$

Longitud de un arco



$$\widehat{\ell} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)2\pi r$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La diagonal de un cuadrado mide $2\sqrt{6}$ cm, ¿cuál es su perímetro?

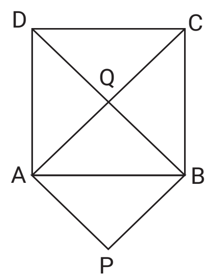
A) $4\sqrt{2}$ cm
B) $8\sqrt{2}$ cm
C) $6\sqrt{3}$ cm
D) $8\sqrt{3}$ cm

Solución:

Si el lado del cuadrado mide "a" cm, entonces su diagonal mide $a\sqrt{2}$ cm, entonces podemos establecer la ecuación: $a\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$, dividiendo por $\sqrt{2}$, tenemos: $a = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{\frac{6}{2}} = 2\sqrt{3}$, como el lado mide $2\sqrt{3}$, entonces el perímetro del cuadrado es $4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ cm, alternativa D.

2. En la figura, ABCD y APBQ son cuadrados, donde Q es la intersección de las diagonales del cuadrado ABCD. Si el área del cuadrado APBQ es b^2 unidades cuadradas, ¿cuál es el perímetro de la figura?

A) 8b unidades
B) $5b\sqrt{2}$ unidades
C) $b(2 + 3\sqrt{2})$ unidades
D) $4b(1 + \sqrt{2})$ unidades



Solución:

Como el área del cuadrado APBQ es b^2, entonces el lado de este cuadrado mide b unidades.
Tenemos que $AQ = b \rightarrow AC = 2b$.
Si el lado del cuadrado ABCD mide a, entonces su diagonal mide $a\sqrt{2}$, como $AC = 2b$, entonces

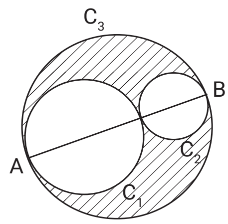
$2b = a\sqrt{2}$, despejando a, tenemos: $a = \frac{2b}{\sqrt{2}}$, racionalizando, se obtiene

$$a = \frac{2b}{\sqrt{2}} = \frac{2b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2b\sqrt{2}}{2} = b\sqrt{2}$$

Por otro lado, el perímetro de la figura es $AP + PB + BC + CD + DA = b + b + 3a = 2b + 3a$, reemplazando a por $b\sqrt{2}$, se tiene: $2b + 3b\sqrt{2} = b(2 + 3\sqrt{2})$, alternativa C.

3. Las circunferencias C_1, C_2 y C_3 de la figura son tangentes. Las circunferencias C_1 y C_2 tienen radios que miden respectivamente 3 y 2 cm. Si $\overline{AB}$ es el diámetro de C_3, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

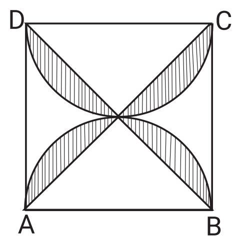
A) 10π cm
B) 15π cm
C) 20π cm
D) 30π cm



Solución:

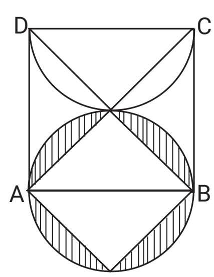
Observa que el perímetro de la figura sombreada corresponde a la suma de las longitudes (o perímetros) de las tres circunferencias, si la pregunta hubiese sido el área, entonces tendrías que haber restado el área de la circunferencia mayor con la suma de las áreas de las circunferencias menores, ¡esto es muy importante entenderlo y considerarlo en los ejercicios!
Como AB se puede calcular sumando las longitudes de los diámetros de las circunferencias menores, tenemos que AB = 6 + 4 = 10 cm, luego el radio de C_3 es 5 cm.
Como la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$, tenemos que la longitud de C_1 es $2\pi r \cdot 3 = 6\pi$ cm, la de C_2 es $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm y la de C_3 es $2\pi \cdot 5 = 10\pi$ cm, entonces el perímetro de la figura sombreada es $6\pi + 4\pi + 10\pi = 20\pi$ cm, alternativa C.

4. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado 10 cm, sobre los lados AB y CD se han trazado dos semicircunferencias que son tangentes en el punto donde se intersectan las diagonales del cuadrado. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



A) $12{,}5\,(\pi - 2)$ cm^2
B) $25\,(\pi - 2)$ cm^2
C) $10\,(\pi + 2\sqrt{2})$ cm^2
D) $25\,(\pi - 4)$ cm^2

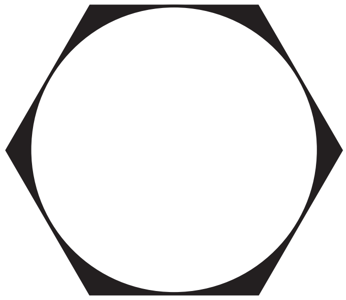
Solución:
Observa que si juntamos la figura sombreada superior e inferior, se forma una figura cuya área corresponde al área de un círculo menos el área de un cuadrado:



Como el lado del cuadrado mide 10 cm, el radio de la circunferencia es 5 cm, con lo que su área es $\pi r^2 = 25\pi$ cm^2. Por otro lado la diagonal del cuadrado blanco mide 10 cm, como el área de un cuadrado se puede obtener como la mitad del cuadrado de la diagonal (ver tabla de áreas y perímetros), tenemos que el área del cuadrado es $\frac{10^2}{2} = 50$ cm^2. Restando el área del círculo con el área del cuadrado, tenemos: $25\pi - 50 = 25(\pi - 2)$ cm^2, alternativa B.

11

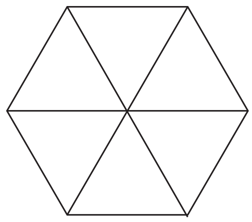
5. En la figura, la circunferencia está inscrita en el hexágono regular. Si el lado del hexágono mide 6 cm, ¿cuál es el área de la figura negra?



A) $9(6\sqrt{3} - 3\pi)$ cm^2
B) $6\sqrt{3}(9 - \pi)$ cm^2
C) $6(9\sqrt{3} - 2\pi)$ cm^2
D) $27(2\sqrt{3} - \pi)$ cm^2

Solución:

Saquemos primero el área del hexágono regular, para ello lo dividiremos en seis triángulos equiláteros:



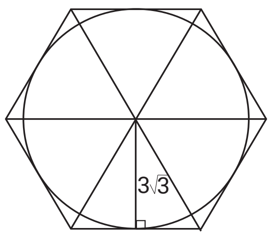
Como el lado de cada triángulo equilátero mide 6 cm y la fórmula de la altura del triángulo equilátero es

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, se tiene que $h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm. El área de cada triángulo equilátero es

$A = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm^2, multiplicando por 6, obtenemos que el área del hexágono es:

$6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ cm^2.

Por otro lado, el radio de la circunferencia es equivalente a la longitud de la altura de cada uno de los triángulos equiláteros:



Como el área del círculo es πr^2, en este caso tenemos: $\pi \cdot (3\sqrt{3})^2 = 27\pi$ cm^2.
El área pedida se obtiene restando el área del hexágono con el área del círculo: $54\sqrt{3} - 27\pi$, factorizando por 27, se tiene: $27(2\sqrt{3} - \pi)$ cm^2, alternativa D.

ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:
- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

11

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. La mitad del área de un cuadrado es 18 cm^2, entonces la cuarta parte de su perímetro es

A) 3 cm
B) 6 cm
C) 9 cm
D) 24 cm

2. Un cuadrado tiene una diagonal que mide $2\sqrt{3}$ cm, ¿cuál es su área?

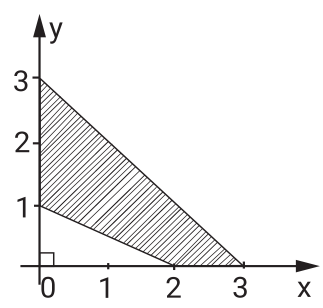
A) 1,5 cm^2
B) 3 cm^2
C) 6 cm^2
D) 12 cm^2

3. En un rectángulo el ancho mide la mitad del largo y su área es 12,5 cm^2, ¿cuál es su perímetro?

A) 7,5 cm
B) 12,5 cm
C) 15 cm
D) 16 cm

4. Según los datos dados en la figura, ¿cuál es el área de la figura sombreada?

A) 2 u^2
B) 2,5 u^2
C) 3,5 u^2
D) 4,5 u^2

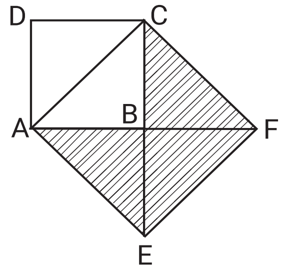


11

5. En un rectángulo un lado mide $\sqrt{2}$ cm y la diagonal mide $3\sqrt{2}$ cm, ¿cuál es su área?

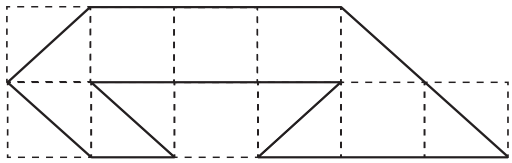
A) $4\sqrt{5}$ cm^2
B) $2\sqrt{2}$ cm^2
C) $4\sqrt{2}$ cm^2
D) $2\sqrt{10}$ cm^2

6. Sobre la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrado ABCD de la figura se ha construido el cuadrado AEFC. Si el área achurada es de 24 cm^2, ¿cuál es el área del cuadrado ABCD?



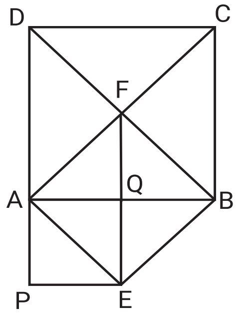
A) 8 cm^2
B) 12 cm^2
C) 16 cm^2
D) 20 cm^2

7. Si cada cuadrado de la figura tiene un área de 4 cm^2, ¿cuál es la longitud de la linea continua?



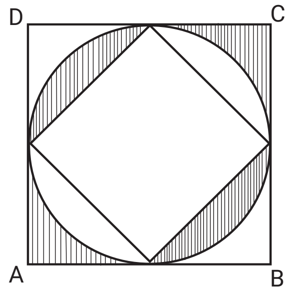
A) 28 cm
B) $(6\sqrt{2} + 10)$ cm
C) $(6\sqrt{2} + 20)$ cm
D) $(12\sqrt{2} + 20)$ cm

8. En la figura, ABCD, AEBF y PEQA son cuadrados. Si el área del cuadrado ABCD es 24 cm^2, ¿cuál es el área de la figura total?



A) 27 cm^2
B) 32 cm^2
C) 33 cm^2
D) 36 cm^2

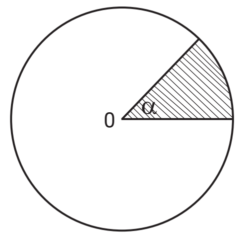
9. En la figura, ABCD es un cuadrado en el que se ha inscrito una circunferencia, Si el lado del cuadrado mide 10 cm, entonces el área achurada es



A) 20 cm^2
B) 25 cm^2
C) 50 cm^2
D) 75 cm^2

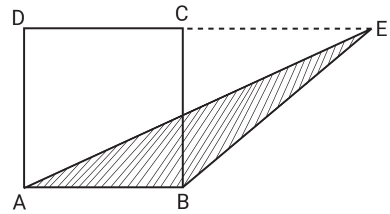
10. En la circunferencia de centro O de la figura, el ángulo central α mide 45°. Si el área achurada es $12{,}5\pi\ cm^2$, ¿cuál es la longitud de la circunferencia?

A) 10π cm
B) 20π cm
C) 40π cm
D) 60π cm



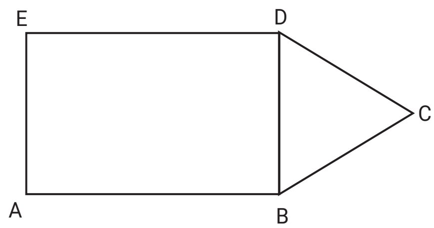
11. En la figura, ABCD es un cuadrado, tal que el 5% de la longitud de su lado es 0,5 cm. Si E es un punto de la recta CD, entonces el área del triángulo ABE es

A) $10\ cm^2$
B) $50\ cm^2$
C) $100\ cm^2$
D) $6{,}25\ cm^2$



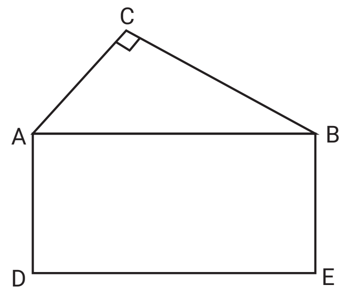
12. En la figura, ABDE es un rectángulo y BCD es un triángulo equilátero. Si AB es el doble de BD y el perímetro del triángulo equilátero es (6a + 3b) unidades, ¿cuál es el perímetro de la figura?

A) 7(a + 2b) u
B) 7(2a + b) u
C) 7(a + 3b) u
D) 6(2a + 3b) u



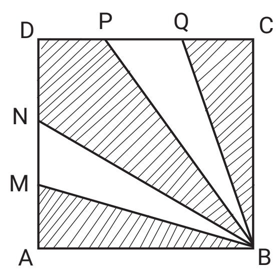
13. En la figura el triángulo ABC es rectángulo en C y ADEB es un rectángulo. Si AC = DA = 3u y CB = 4u, ¿cuál es la razón entre el área del triángulo y la del rectángulo?

A) 3 : 5
B) 1 : 2
C) 4 : 5
D) 2 : 5



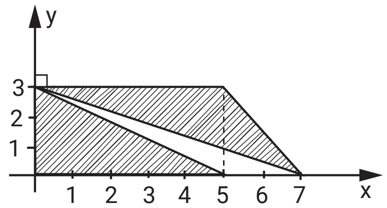
14. En la figura, ABCD es un cuadrado donde AM = MN = ND = DP = PQ = QC, ¿qué porcentaje del cuadrado ABCD es el área de la figura sombreada?

A) 50 %
B) 60 %
C) $66{,}\overline{6}\%$
D) 75%



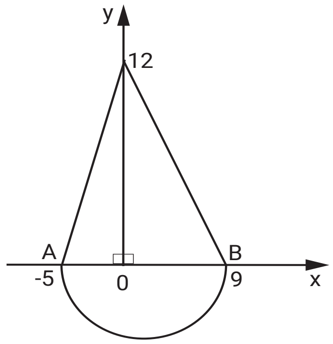
15. Según los datos de la figura, el área de la zona sombreada es

A) $3\ u^2$
B) $15\ u^2$
C) $16{,}5\ u^2$
D) $22{,}5\ u^2$



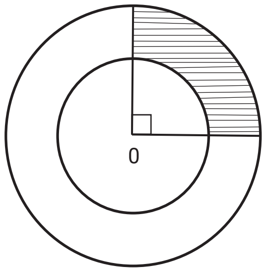
16. En la figura, el arco AB corresponde a una semicircunferencia, según los datos dados, ¿cuál es el perímetro de la figura?

A) $(28 + 2\pi)$ u
B) $(28 + 4\pi)$ u
C) $(28 + 7\pi)$ u
D) $(28 + 14\pi)$ u



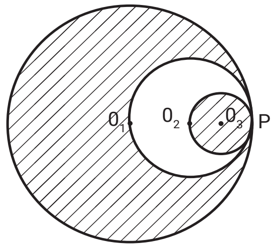
17. En la figura, las circunferencias tienen como centro el punto O. Si el área de la figura sombreada es $5\pi\ cm^2$ y el radio de la circunferencia mayor mide 6 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor?

A) 2 cm
B) 3 cm
C) 4 cm
D) 16 cm



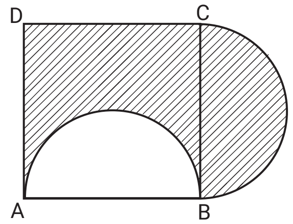
18. En la figura, O_1, O_2 y O_3 son los centros de las circunferencias las que son tangentes en el punto P. Si el radio de la circunferencia mayor es 10 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

A) 15π cm
B) 35π cm
C) $37{,}5\pi$ cm
D) 70π cm



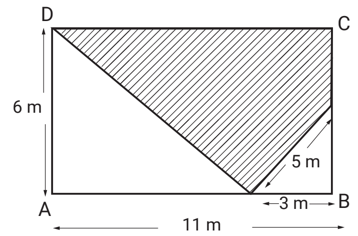
19. En la figura. ABCD es un cuadrado de lado 6 cm. Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se han construido dos semicircunferencias, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

A) $(12 + 6\pi)$ cm
B) $(12 + 9\pi)$ cm
C) $(18 + 6\pi)$ cm
D) 24 cm



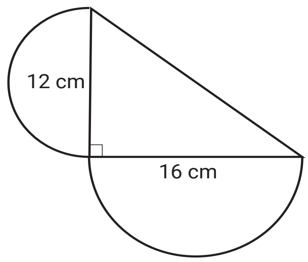
20. En la figura, ABCD es un rectángulo, según los datos dados, ¿cuál es el área de la figura sombreada?

A) $24\ m^2$
B) $26\ m^2$
C) $28\ m^2$
D) $36\ m^2$



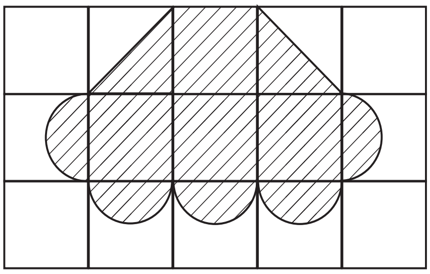
21. Sobre los catetos del triángulo rectángulo se han construido dos semicircunferencias, ¿cuál es el perímetro de la figura?

A) 34π cm
B) $(14\pi + 48)$ cm
C) $(14\pi + 20)$ cm
D) $(28\pi + 20)$ cm



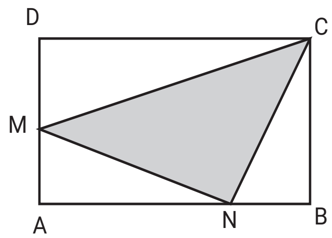
22. Los cuadrados de la figura tienen lados de longitud un cm. Si los arcos dibujados corresponden a semicircunferencias, ¿cuál es el área de la figura sombreada?

A) $(5 + 2{,}5\pi)\ cm^2$
B) $\left(5 + \frac{5}{8}\pi\right)\ cm^2$
C) $(5 + 1{,}25\pi)\ cm^2$
D) $(1 + 2\sqrt{2} + 2{,}5\pi)\ cm^2$



23. En el rectángulo ABCD de la figura, AN = 2 NB y AM = MD. ¿Qué fracción del área del rectángulo es el área del triángulo MNC?

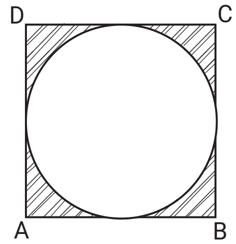
A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{6}$
C) $\frac{5}{12}$
D) $\frac{7}{12}$



11

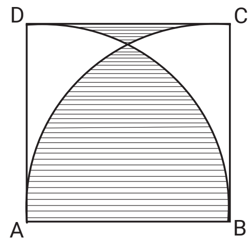
24. En la figura, la circunferencia está inscrita en el cuadrado ABCD. Si la longitud de la circunferencia es 6π cm, entonces el área de la figura sombreada es

A) $(18 - 9\pi)$ cm^2
B) $(9\pi - 18)$ cm^2
C) $(36 - 9\pi)$ cm^2
D) $(36 - 6\pi)$ cm^2



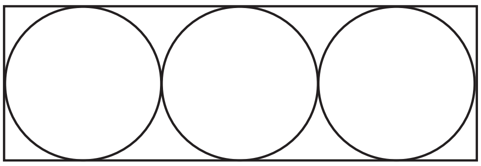
25. En la figura, ABCD es un cuadrado cuya área es 16 cm^2, con centro en los vértices A y B se han trazado dos arcos de circunferencias que pasan por dos de los vértices del cuadrado. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?

A) $8(\pi + 1)$ cm
B) $4(\pi + 2)$ cm
C) $4(\pi + 1)$ cm
D) 8π cm



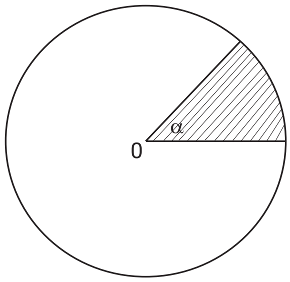
26. En el rectángulo de la figura, las circunferencias son tangentes entre sí y las de los extremos son tangentes a tres de los lados del rectángulo. Si cada una de las circunferencias tiene una longitud de 10π cm, ¿cuál es el perímetro del rectángulo?

A) 40 cm
B) 50 cm
C) 80 cm
D) 90 cm



27. En la circunferencia de centro O de la figura, el ángulo α mide 40° y el área sombreada mide 5π cm^2, ¿cuál es el área del círculo?

A) 20π cm^2
B) 40π cm^2
C) 45π cm^2
D) 60π cm^2



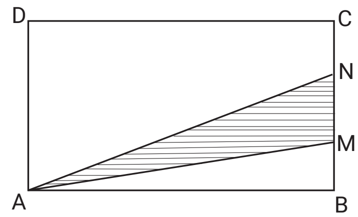
28. En la figura, ABCD es un rectángulo y M y N son puntos del lado $\overline{BC}$, tales que BM = MN = NC. ¿Qué parte del área del rectángulo es el área del triángulo AMN?

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{3}$



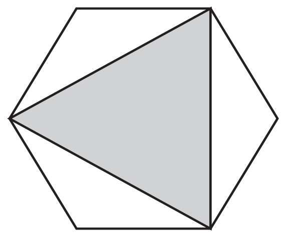
29. En la figura se tiene un hexágono regular de lado "a" cm, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?

A) $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\ cm^2$

B) $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\ cm^2$

C) $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\ cm^2$

D) $3a\sqrt{3}\ cm^2$



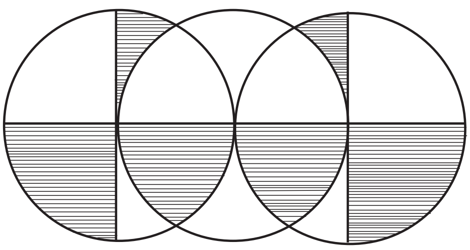
30. En la figura, las circunferencias de los extremos son tangentes exteriormente y la central tiene como centro el punto de tangencia de las circunferencias anteriores y pasa por el centro de ellas. Si las circunferencias tienen un radio que mide r unidades, entonces el área de la figura sombreada medida en unidades cuadradas es

A) $\frac{1}{3}\pi r^2$

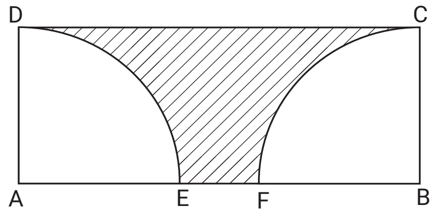
B) $\frac{1}{2}\pi r^2$

C) $\frac{3}{2}\pi r^2$

D) πr^2

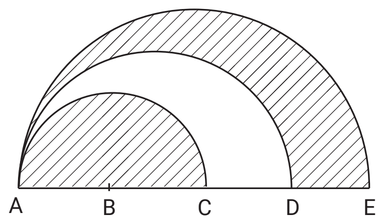


31. En la figura, ABCD es un rectángulo, con centro en los vértices A y B se han trazado los arcos DE y CF respectivamente, con E y F en el lado $\overline{AB}$ del rectángulo. Si AE = 2EF, AB = 15 cm, ¿cuál es el área de la figura sombreada?



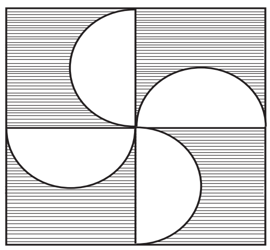
A) $4{,}5(20 - \pi)$ cm^2
B) $6(3 + \pi)$ cm^2
C) $9(10 - \pi)$ cm^2
D) $18(5 - \pi)$ cm^2

32. En la figura, AC, AD y AE son semicircunferencias tales que AB = BC = CD = DE = 4 cm, entonces el área sombreada es



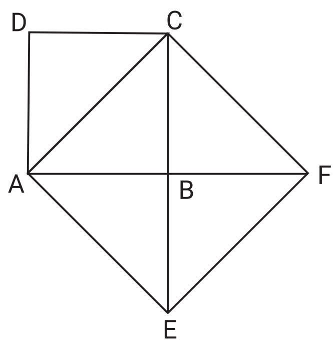
A) 6π cm^2
B) 22π cm^2
C) 40π cm^2
D) 54π cm^2

33. En la figura, las semicircunferencias son congruentes de radio r unidades, entonces el área achurada medida en unidades cuadradas es



A) $2r^2(2 - \pi)$
B) $r^2(16 - \pi)$
C) $2r^2(8 - \pi)$
D) $2r^2(4 - \pi)$

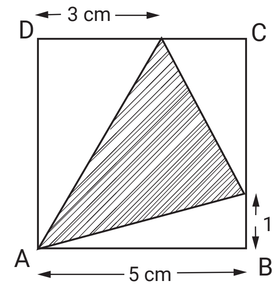
34. En la figura, ABCD y AEFC son cuadrados. Si el perímetro de AEFC es 12 cm, ¿cuál es el perímetro de ABCD?



A) $3\sqrt{2}$ cm
B) $6\sqrt{2}$ cm
C) $8\sqrt{2}$ cm
D) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ cm

35. En la figura, ABCD es un cuadrado. Según los datos dados, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?

A) 10,5 cm^2
B) 11 cm^2
C) 11,5 cm^2
D) 12 cm^2



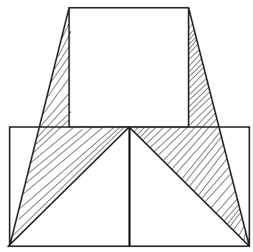
36. Los tres cuadrados de la figura son congruentes de lado a unidades, ¿cuánto es el área de la figura sombreada medida en unidades cuadradas?

A) $\frac{3}{4}a^2$

B) a^2

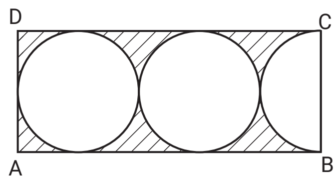
C) $2a^2$

D) Falta información para determinarlo.



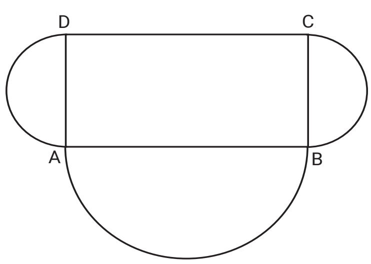
37. En el rectángulo ABCD de la figura, se han trazado dos circunferencias tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo y la tercera figura corresponde a una semicircunferencia tangente a una de las circunferencias anteriores. Si tanto las circunferencias como la semicircunferencia tienen radios de longitud "r" cm, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

A) r(12 + 5π) cm
B) r(14 + 5π) cm
C) r(14 – 5π) cm
D) 14r cm



38. Sobre los lados $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del rectángulo de la figura se han construido tres semicircunferencias. Si AB = 2BC = 8 cm, ¿cuál es el perímetro total de la figura?

A) (8π + 8) cm
B) (8π + 24) cm
C) (16π + 8) cm
D) (24π + 8) cm



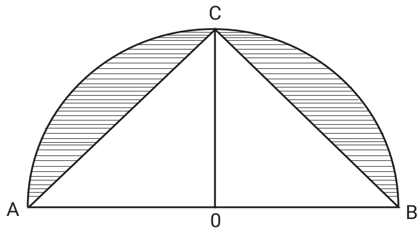
39. En la figura el arco AB es una semicircunferencia de centro O y radio 6 cm, si $\overline{CO} \perp \overline{AB}$, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

A) $(6\pi + 12\sqrt{2})$ cm

B) $(12\pi + 12\sqrt{2})$ cm

C) $(18\pi - 36)$ cm

D) $(3\pi + 6\sqrt{2})$ cm



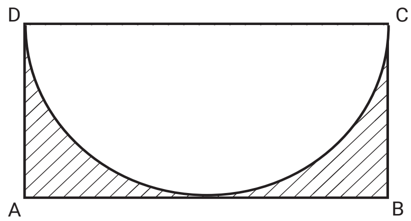
40. En la figura, ABCD es un rectángulo y sobre su lado $\overline{CD}$ se ha construido una semicircunferencia de radio a unidades que es tangente al lado $\overline{AB}$. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?

A) $\left(4a + \frac{\pi}{2}a\right)$ u

B) $(4a + \pi a)$ u

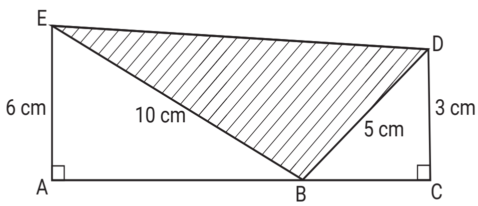
C) $(6a + \pi a)$ u

D) $\left(2a^2 + \frac{\pi}{2}a^2\right)$ u



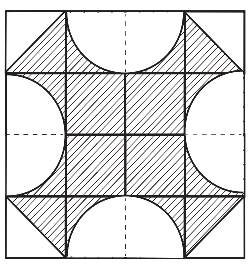
41. En la figura, los triángulos ABE y BCD son rectángulos en A y C respectivamente. Según los datos dados, ¿cuál es el área de la figura sombreada?

A) 24 cm^2
B) 25 cm^2
C) 32 cm^2
D) 42 cm^2



42. En la figura se han construido cuatro semicircunferencias y el área de los cuadrados es 1 cm^2 ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

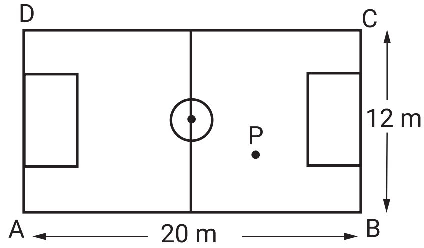
A) $2(\pi + 2\sqrt{2})$ cm
B) $4(\pi + \sqrt{2})$ cm
C) $4(\pi + 2\sqrt{2})$ cm
D) $(14 - 2\pi)$ cm



11

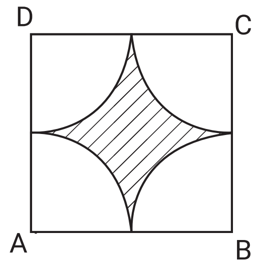
43. ABCD es un rectángulo y modela una cancha de futbolito cuyas dimensiones se muestran en la figura. El centro de la cancha se ubica en el centro del rectángulo y la cancha es simétrica con respecto a la recta que pasa por su centro y es perpendicular a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Pedro es uno de los jugadores y en un momento del partido se ubica en el punto P de la figura, el cual está a 3 m del lado $\overline{AB}$ y a 6 m del lado $\overline{BC}$, en ese instante, ¿a qué distancia estará del centro de la cancha?

A) 4 m
B) 5 m
C) $\sqrt{52}$ m
D) $\sqrt{65}$ m



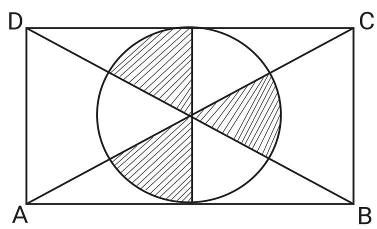
44. En la figura se muestra una baldosa de 40 x 40 cm, cuyo diseño consiste en cuatro arcos de circunferencias congruentes, cuyos centros son los vértices del cuadrado. Si se ocupará una cierta cantidad entera de estas baldosas para cubrir el piso de una sala, ¿qué porcentaje del piso quedará sombreado?

A) $12{,}5\,(8 - \pi)$ %
B) $25(4 - \pi)$ %
C) $2{,}5(40 - \pi)$ %
D) Falta información para determinarlo.



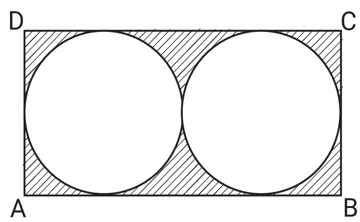
45. En la figura, ABCD es un rectángulo, la circunferencia tiene como centro la intersección de las diagonales y es tangente a dos de los lados del rectángulo. Si BC = 12 cm, ¿cuál es el área de la figura sombreada?

A) 6π cm^2
B) 9π cm^2
C) 12π cm^2
D) 18π cm^2



46. Las circunferencias de la figura son tangentes al rectángulo ABCD y cada una tiene un área de 4π cm^2, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

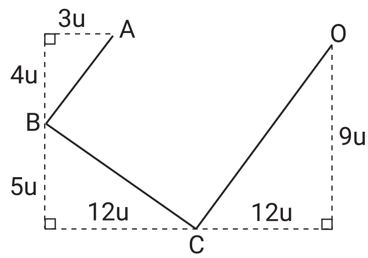
A) $(12 + 4\pi)$ cm
B) $(24 + 4\pi)$ cm
C) $(24 + 8\pi)$ cm
D) $(24 - 8\pi)$ cm



11

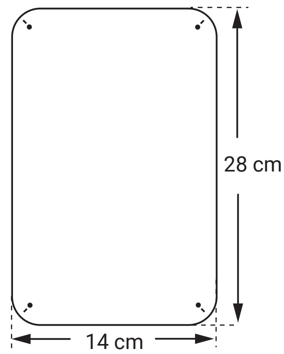
47. La figura muestra la trayectoria seguida por una bolita de billar que fue lanzada desde A, ¿qué distancia recorrió hasta llegar al punto O?

A) 33 u
B) 38 u
C) 45 u
D) 78 u



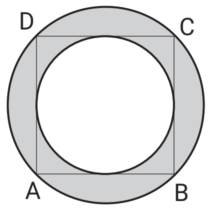
48. Una pantalla de una tablet tiene forma de rectángulo, para redondear sus bordes se han trazado cuartos de circunferencia cuyos centros se ubican a 1 cm de los lados del rectángulo tal como se muestra en la figura. Si las dimensiones del tablet son 14 cm y 28 cm, ¿cuál es el área de la pantalla de este tablet?

A) $(388 - \pi)$ cm^2
B) $(388 + \pi)$ cm^2
C) $(388 + 2\pi)$ cm^2
D) $(364 + \pi)$ cm^2



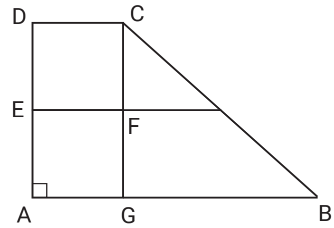
49. En el cuadrado ABCD de la figura se han inscrito y circunscrito circunferencias. Si el lado del cuadrado mide "a" cm, ¿cuál es el área de la corona circular?

A) $\frac{\pi}{4}a^2$ cm^2
B) $\frac{\pi}{2}a^2$ cm^2
C) $\frac{3}{2}\pi a^2$ cm^2
D) πa^2 cm^2



50. En la figura, EFCD es un cuadrado de área 9 cm^2, E es el punto medio de $\overline{AD}$ y GB = 2DC, ¿cuál es el área del cuadrilátero ABCD?

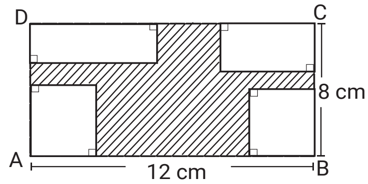
A) 33 cm^2
B) 36 cm^2
C) 81 cm^2
D) 124 cm^2



11

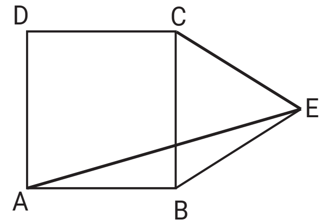
51. En la figura, ABCD es un rectángulo, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

A) 20 cm
B) 32 cm
C) 40 cm
D) Falta información para determinarlo.



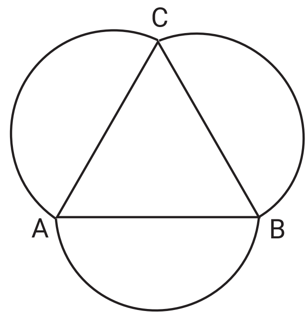
52. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado 8 cm y BEC es un triángulo equilátero, ¿cuál es la longitud de $\overline{AE}$?

A) $2\sqrt{10}$ cm
B) $4\sqrt{10}$ cm
C) $2\sqrt{29}$ cm
D) $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm



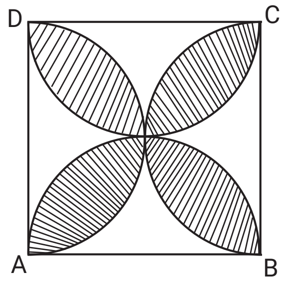
53. Sobre los lados del triángulo equilátero ABC se han construido tres semicircunferencias de radio r cm, ¿cuál es el área de la figura?

A) $\frac{3}{2}\pi r^2$ cm^2
B) $\frac{r^2}{2}(\sqrt{3}+\pi)$ cm^2
C) $\frac{r^2}{2}(2\sqrt{3}+3\pi)$ cm^2
D) $r^2(\sqrt{3}+3\pi)$ cm^2



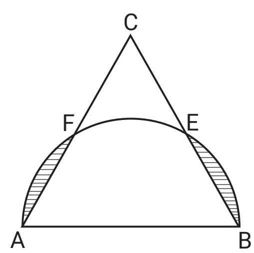
54. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado 4 cm. Sobre cada uno de los lados del cuadrado se ha construido una semicircunferencia, ¿cuál es el área de la figura sombreada?

A) $4(\pi - 2)$ cm^2
B) $8(\pi - 2)$ cm^2
C) $8(\pi - 1)$ cm^2
D) $16(\pi - 1)$ cm^2

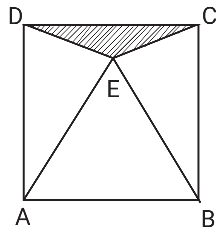


55. En la figura, ABC es un triángulo equilátero de lado 12 cm, sobre el lado $\overline{AB}$ se ha construido una semicircunferencia que corta a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en los F y E respectivamente.
¿Cuál es el área de la figura sombreada?

A) $3(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
B) $6(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
C) $9(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
D) $6(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2



56. ABCD es un cuadrado de lado 8 cm y ABE es un triángulo equilátero, ¿cuál es el área del triángulo DEC?



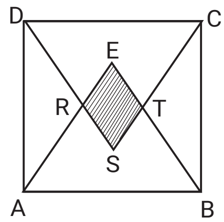
A) $2\sqrt{3}$ cm^2

B) $8(2 - \sqrt{3})$ cm^2

C) $16(2 - \sqrt{3})$ cm^2

D) $32(2 - \sqrt{3})$ cm^2

57. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado 12 cm y ABE y DSC son triángulos equiláteros, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?



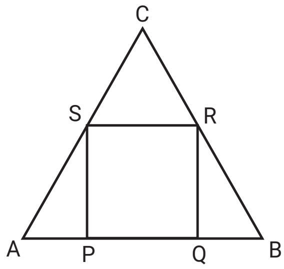
A) $4(3 - \sqrt{3})$ cm

B) $8(3 - \sqrt{3})$ cm

C) $16(3 - \sqrt{3})$ cm

D) $48(3 - \sqrt{3})$ cm

58. En la figura, ABC es un triángulo equilátero, P, Q, R y S pertenecen a los lados del triángulo equilátero y PQRS es un cuadrado de área 36 cm^2, ¿cuál es el perímetro del triángulo ABC?



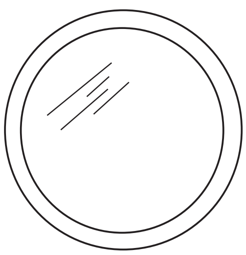
A) $4\sqrt{3}$ cm

B) $18(\sqrt{3} + 1)$ cm

C) $6(2\sqrt{3} + 3)$ cm

D) $6(3 + 4\sqrt{3})$ cm

59. En la figura, se muestra un espejo circular que está rodeado por un borde de madera que tiene un ancho constante de 2 cm. Si el área del borde de madera es 52π cm^2, ¿cuál es el radio del espejo?



A) 10 cm

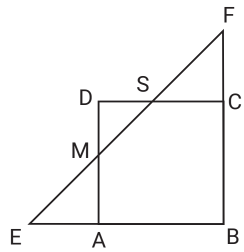
B) 12 cm

C) 14 cm

D) 16 cm

11

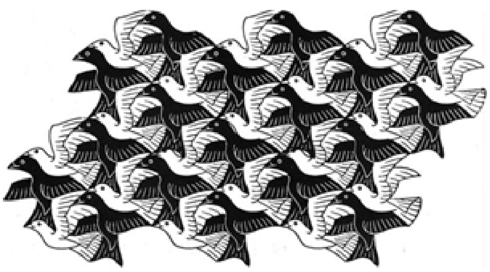
60. En la figura, ABCD es un cuadrado, M y S son los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente y la recta MS intersecta a las rectas AB y BC en E y F respectivamente. Si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ miden x e y unidades respectivamente, entonces el perímetro del triángulo EBF es



A) (2x + 3y) unidades
B) (3x + 1,5y) unidades
C) (3x + 2y) unidades
D) (3x + 3y) unidades

Capítulo 12

VECTORES EN EL PLANO Y TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS



M. C. Escher (1898 - 1972) fue un destacado artista, en muchas de sus afamadas obras se destaca el uso de las transformaciones isométricas como la traslación, la reflexión y una rotación, las que serán materia de estudio del presente capítulo.

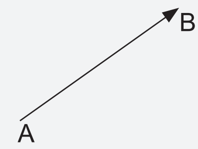
CONCEPTOS CLAVES

- **Vectores en el plano**
- **Adición y sustracción de vectores**
- **Longitud o norma de un vector**
- **Traslación**
- **Reflexión con respecto a una recta**
- **Reflexión con respecto a un punto**
- **Giro o rotación con respecto a un punto**

ELEMENTOS BÁSICOS

- **Vector geométrico**

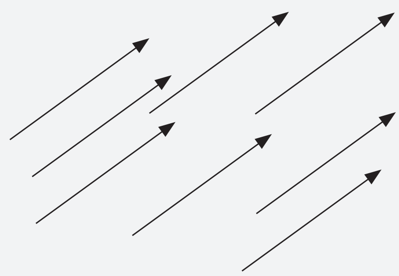
Un vector geométrico se distingue por tener un punto inicial (u origen), un punto final, una dirección, un sentido y una magnitud.



La magnitud o "largo" del vector también se denomina longitud o norma.

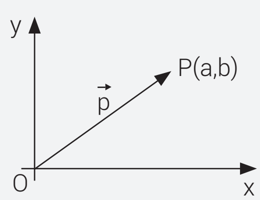
- **Vectores equipolentes**

Son aquellos que tienen igual dirección, sentido y magnitud.



- **Vector de posición**

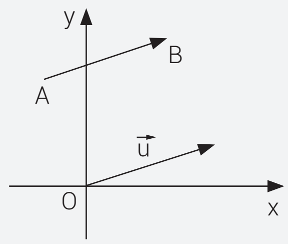
Supongamos que tenemos un punto P en el plano cartesiano bidimensional o en el espacio tridimensional, el vector cuyo punto inicial es el origen del sistema cartesiano y el punto final es el punto P, se llama vector de posición del punto P y generalmente se designa utilizando la letra minúscula que designa al punto:



Como hay una correspondencia biunívoca entre los puntos y los vectores de posición, cuando hablemos de vectores en un sistema cartesiano, podemos referirnos ya sea a la flecha que va desde al origen al punto o bien a las coordenadas del punto al cual estamos haciendo referencia.
En la figura, cuando hablamos del vector $\vec{p}$, podemos referirnos a $\overrightarrow{OP}$ en el sentido geométrico o a las coordenadas del punto P, es decir $\vec{p}$ = (a,b).

- **Vector libre**

Un vector libre es aquél cuyo punto inicial no coincide con el origen del sistema cartesiano.
Todo vector se puede asociar a un vector equipolente con él, cuyo punto inicial sea el origen del sistema cartesiano.



El vector libre $\overrightarrow{AB}$ es equipolente al vector $\vec{u}$

IGUALDAD Y OPERATORIA ENTRE VECTORES

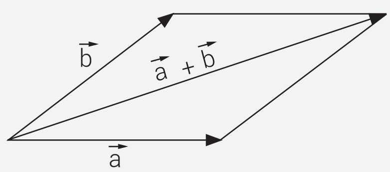
- **Igualdad de vectores**

Dos vectores son iguales cuando sus respectivas coordenadas son iguales:

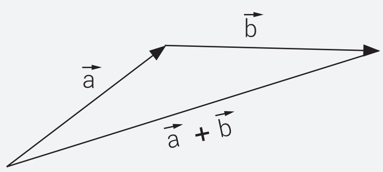
$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

- **Adición de vectores**

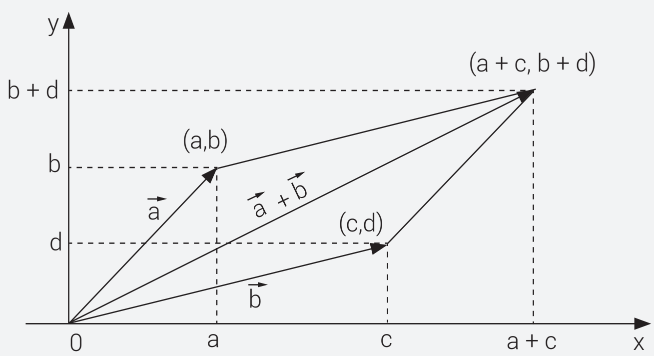
Para sumar dos vectores se aplica la ley del triángulo o la ley del paralelogramo, de acuerdo a la posición en que se encuentran los vectores.
Si los vectores tienen el punto de partida en común, ocupamos la ley del paralelogramo:



Si el punto de llegada de uno de los vectores coincide con el punto de inicio del otro, ocupamos la ley del triángulo:



Si se trata de sumar vectores dados en coordenadas, la suma se obtiene sumando las coordenadas respectivas:



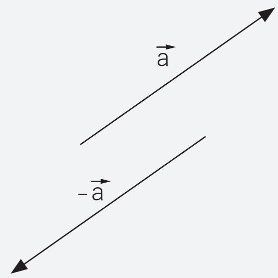
En $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c , b + d)$$

12

- **Sustracción de vectores**

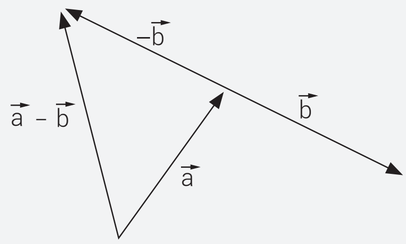
El inverso aditivo u opuesto de un vector es aquél que tiene misma dirección, misma longitud, pero distinto sentido. El opuesto de $\vec{a}$ es el vector $-\vec{a}$:



Ahora, para restar dos vectores, al primero se le suma el opuesto del segundo

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})}$$

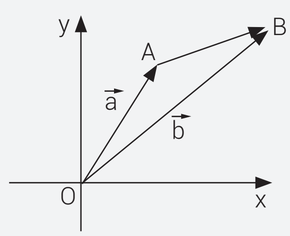
Geométricamente, la resta de vectores se visualiza de la siguiente forma:



Cuando los vectores están dados por sus coordenadas, la resta se obtiene restando las coordenadas respectivas:

$$\text{En } \mathbb{R}^2\text{:} \quad (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

Es importante considerar que si tenemos dos puntos en $\mathbb{R}^2$, podemos determinar un vector libre $\overrightarrow{AB}$, restando el vector de posición de B con el vector de posición de A (punto final menos el punto inicial):



Observa en la figura que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

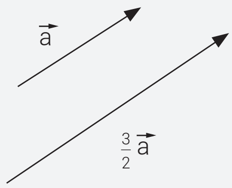
$$\boxed{\text{Si } A(a_1, a_2) \text{ y } B(b_1, b_2) \quad \leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)}$$

12

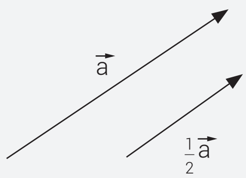
- **Ponderación de un vector**

La ponderación es una operación entre un escalar (lo que asumiremos en este caso que es un número real) y un vector. Si tenemos un vector $\vec{a}$ y lo ponderamos por el escalar λ, obtenemos el vector $\lambda\vec{a}$, el cual tiene la misma dirección que $\vec{a}$, pero su sentido y el módulo pueden variar dependiendo de la magnitud y signo del escalar (siempre que $\lambda \neq 0$)
Geométricamente, tenemos las siguientes situaciones:

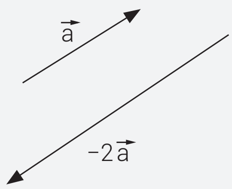
SI $\lambda > 1$, el vector conserva el sentido y aumenta su módulo:



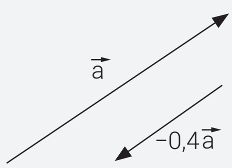
SI $0 < \lambda < 1$, el vector conserva el sentido y disminuye su módulo:



SI $\lambda < -1$, el vector, cambia el sentido y aumenta su módulo:



SI $-1 < \lambda < 0$, el vector conserva la dirección, cambia el sentido y disminuye su módulo:



En el caso que los vectores estén dados por sus coordenadas, entonces multiplicamos el ponderador, con cada una de sus coordenadas:

$$\boxed{\lambda\,(a, b) = (\lambda a\,,\,\lambda b)}$$

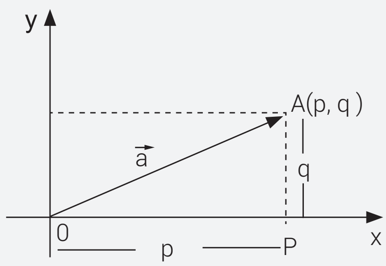
12

LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

La longitud o norma de un vector es la distancia que hay entre el punto de partida y el punto de llegada y se designa con el símbolo $||\vec{a}||$ o bien $|\vec{a}|$.
Si los vectores están dados en términos de sus coordenadas, tenemos que

$$\text{Si } \vec{a} = (p, q) \leftrightarrow ||\vec{a}|| = \sqrt{p^2 + q^2}$$

En el ΔOPA, utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que $OA^2 = OP^2 + PA^2$, entonces $OA = \sqrt{p^2 + q^2}$.



$$\boxed{|OA| = ||\vec{a}|| = \sqrt{p^2 + q^2}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Para calcular la distancia entre dos puntos, tenemos la siguiente expresión:

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

12

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Para calcular el punto medio entre dos puntos, tenemos la siguiente expresión:

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces el punto medio M es $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

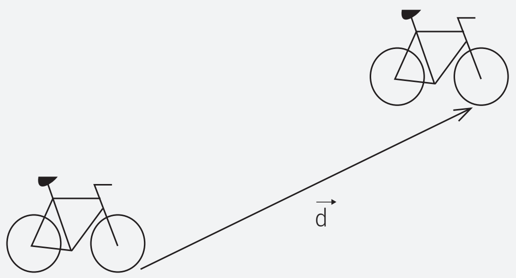
Las transformaciones isométricas en el plano son cuatro:

1. Traslación
2. Reflexión con respecto a una recta o simetría axial.
3. Reflexión con respecto a un punto o simetría puntual.
4. Giro o rotación.

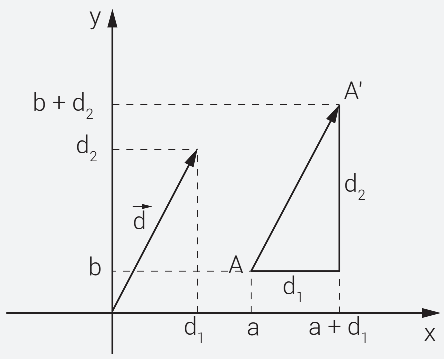
Las isometrías o transformaciones isométricas convierten a una figura en otra que resulta ser congruente con la original.

- **Traslación**

Cuando efectuamos una traslación, todos los puntos de la figura se mueven según una cierta dirección, la cual queda determinada por el vector dirección:

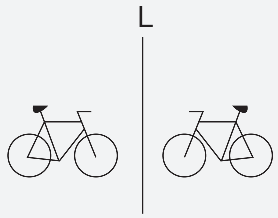


En un sistema cartesiano, la dirección queda determinada por un vector dado como par ordenado.
Si al punto (a, b) lo trasladamos en la dirección (d_1, d_2), entonces queda en el punto (a + d_1, a + d_2).



- **Reflexión con respecto a una recta (Simetría Axial)**

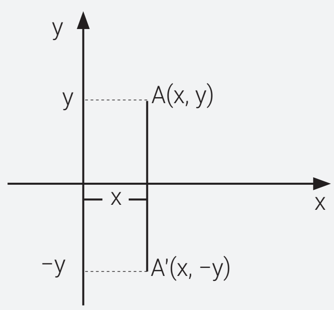
En este caso la transformación produce el "efecto espejo":



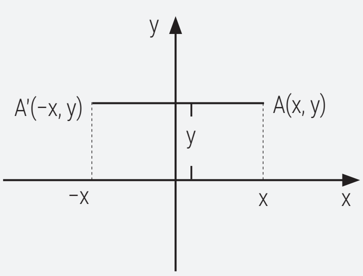
La figura de la izquierda se ha reflejado con respecto a la recta L, o se le ha aplicado una simetría o bien una simetría axial, quedando convertida en la figura de la derecha.

En un sistema cartesiano, es útil saber las siguientes simetrías axiales:

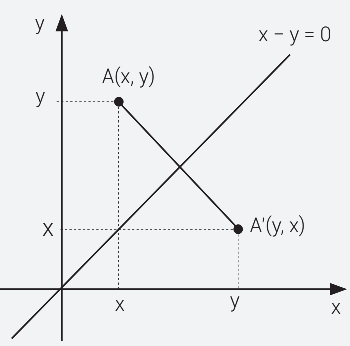
A) Simetría con respecto al eje x
En este caso el punto (x, y) queda en el punto (x, −y):



B) Simetría con respecto al eje y
El punto (x, y) queda en el punto (−x, y):

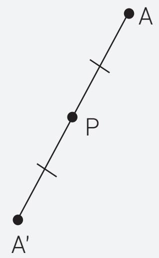


C) Simetría con respecto a la recta de ecuación x − y = 0
En este caso el punto (x, y) queda en el punto (y, x):

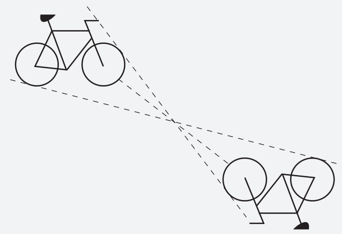


- **Reflexión con respecto a un punto (Simetría puntual)**

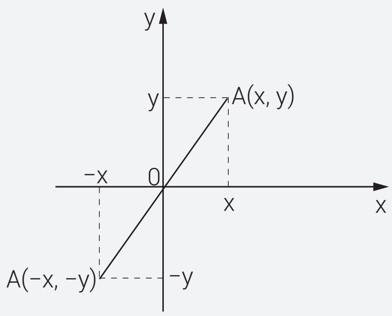
Si a un punto A le aplicamos una simetría con respecto a P, entonces su imagen quedará en la recta $\overleftrightarrow{AP}$, de modo que P es el punto medio entre A y su imagen.



Si a una figura le aplicamos una reflexión con respecto a un punto, entonces la figura quedará girada en 180° con respecto a este punto.



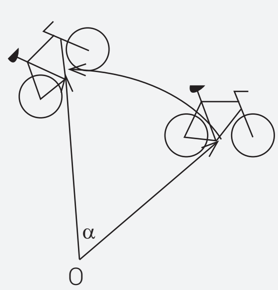
En un sistema cartesiano, cuando a un punto (x, y) se le aplica una reflexión con respecto al origen, queda en el punto (−x, −y):

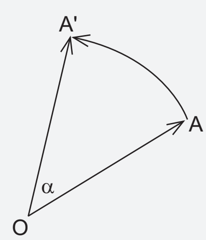


- **Rotación o giro con respecto a un punto**

Si el punto A se gira en α° con respecto al punto O de la figura, entonces queda en un punto A' de modo que OA = OA' y ∢AOA' = α.

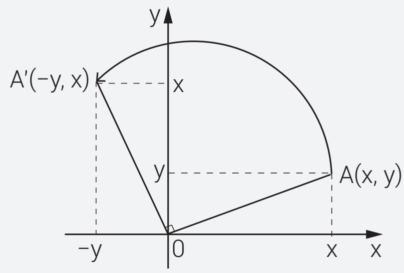
Se entenderá, a no ser que se indique lo contrario, que el sentido del giro es contrario al sentido del movimiento de las manecillas del reloj (sentido antihorario).



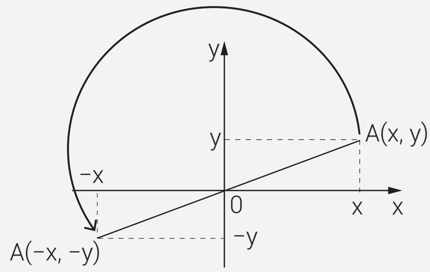


A continuación se muestran las rotaciones en sentido antihorario con respecto al origen para ángulos de 90°, 180° y 270°.

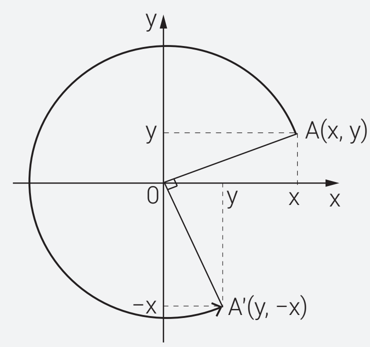
A) Rotación en 90°
El punto (x, y) queda en el (−y, x):



B) Rotación en 180°
El punto (x, y) queda en el (−x−y):



C) Rotación en 270°
El punto (x, y) queda en el (y, −x):

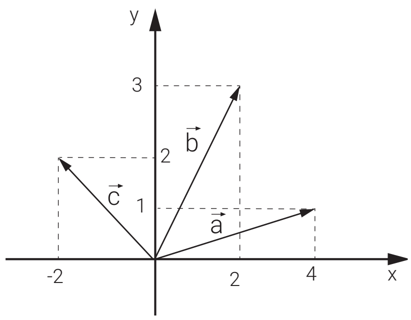


Nota que la rotación en 270° en sentido antihorario es equivalente a un giro en 90° en sentido horario.

12

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura, se muestran la ubicación de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en un plano cartesiano, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$

B) $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 5$

C) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a} + \vec{c}|$

D) $(2\vec{a} - 3\vec{b})$ está en el tercer cuadrante.

Solución:

Según la información dada en la figura, tenemos que $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (2, 3)$ y $\vec{c} = (-2, 2)$, entonces

$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (4, 1) - (2, 3) + (-2, 2) = 0$, luego A) es verdadera.

Para B), $\vec{a} - 2\vec{b} = (4, 1) - 2 \cdot (2, 3) = (4, 1) - (4, 6) = (0, -5)$, entonces $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$, luego es verdadera.

En C), $\vec{a} + \vec{b} = (6, 4) \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) \rightarrow |\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, por lo tanto $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a} + \vec{c}|$, luego C) es verdadera.

En D), $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \cdot (4, 1) - 3 \cdot (2, 3) = (2, -7)$ y este vector está en el cuarto cuadrante, luego D) es falsa.

2. El punto A(5, 3) se rota en 90° en sentido antihorario y después se le aplica una simetría axial con respecto al eje x quedando finalmente en el punto P, ¿en que dirección se debe trasladar el punto A para que quede en el punto P?

A) (6, 0)

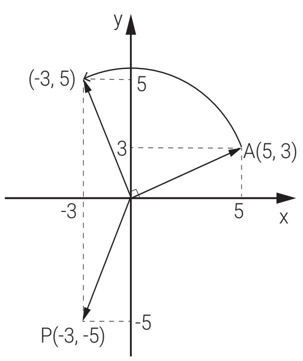
B) (0, 10)

C) (-8, -8)

D) (6, -10)

Solución:

Si el punto (x, y) se gira en torno al origen en 90° en sentido antihorario queda en el punto (-y, x), luego el punto A(5, 3) queda en el (-3, 5) y si este punto se refleja en torno al eje x queda en el P(-3, -5), tal como se muestra en la siguiente figura:



Ahora si queremos calcular la dirección en que se debe trasladar el punto A para que quede en el punto P, debemos restar las coordenadas de P con las coordenadas de A: (-3, -5) – (5, 3) = (-8, -8), luego la alternativa correcta es C).

12

3. Un punto A(x, y) se refleja con respecto al eje x, quedando en el punto B, ¿cuál de las siguientes transformaciones **NO** permiten que el punto A quede en el punto B?

A) Una traslación en la dirección (0, -2y).
B) Una reflexión respecto del eje y, después una simetría puntual respecto del origen.
C) Un giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen y después una traslación en la dirección (x + y, -x – y).
D) Una traslación en la dirección (-2x, -2y) y después una reflexión en torno al eje x.

Solución:

Sabemos que si reflejamos el punto (x, y) con respecto al eje x queda en el (x, -y), veamos cual de las alternativas no deja el punto en esta posición.
En A) si el punto (x, y) se traslada en la dirección (0, -2y) queda en el punto (x, y) + (0, -2y) = (x, -y), luego esta alternativa no es.
En B) si el punto (x, y) lo reflejamos en torno al eje y queda en el (-x, y) y si a este punto lo reflejamos en torno al origen queda en el (x, -y), luego esta alternativa tampoco es.
En C) si giramos el punto (x, y) en 90° en sentido antihorario respecto del origen queda en el punto (-y, x) y si este punto lo trasladamos en la dirección (x + y, -x – y) queda en el punto (-y, x) + (x + y, -x – y) = (x, -y), luego esta altenativa no es.
En D) si el punto (x, y) lo trasladamos en la dirección (-2x, -2y), queda en el punto (x, y) + (-2x, -2y) = (-x, -y) y si este punto lo reflejamos en torno al eje x queda en el (-x, y), luego esta alternativa no permite que el punto quede en el (x, -y).

4. A un punto se le efectúa una traslación en la dirección (−2, 3) , luego se le aplica una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, quedando en el punto (2, 5), ¿cuál era el punto inicial?

A) (7, 5)
B) (7, -5)
C) (-7, -1)
D) (0, 2)

Solución:

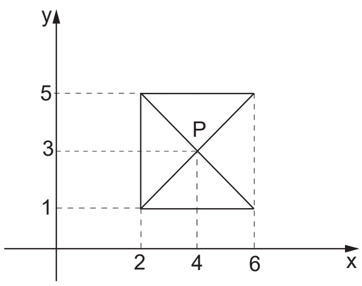
Supongamos que el punto inicial era (a, b), al aplicarle una traslación en la dirección (−2, 3) queda en el punto (a − 2, b + 3). Por otro lado, al aplicarle un giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, el punto (x, y) queda en el punto (−y, x), en este caso, el punto (a − 2, b + 3) quedará en el punto (−(b + 3), a − 2), si igualamos este punto al (2, 5), obtenemos que −(b + 3) = 2 y a − 2 = 5.
Resolviendo estas ecuaciones, se concluye que a = 7 y b = −5, por lo tanto el punto inicial era el (7, −5), luego la alternativa correcta es B). Otra forma de resolver este ejercicio, es aplicando las transformaciones inversas desde el punto final hasta llegar el punto inicial; es decir al (2, 5) le aplicamos primero un giro en sentido horario con respecto al origen, luego al punto obtenido le aplicamos una traslación según la dirección (2, −3), obteniéndose de esta forma el punto inicial.

5. ¿Cuál de las siguientes transformaciones **NO** permite que el punto (6, 5) quede en el punto (2, 1)?

A) Una traslación según la dirección (−4, −4).
B) Una reflexión con respecto al punto (4, 3).
C) Una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al punto (2, 5).
D) Una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al punto (6, 1).

Solución:

En A) podemos obtener la dirección de traslación restando el punto final (2, 1) con el punto inicial (6, 5), $\vec{d} = (2, 1) - (6, 5) = (-4, -4)$, por lo tanto A) es correcta. Para ver si las restantes alternativas son verdaderas, nos ayudaremos con la figura que se presenta a continuación, aunque se pueden utilizar otros métodos que no la requieren.



Observa que el punto (4, 3) es el punto medio entre el (6, 5) y el (2, 1), por lo tanto el (2, 1) se puede obtener a partir del (6, 5) través de una reflexión con respecto al (4, 3), por lo tanto B) es verdadera.

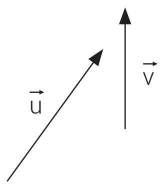
Para las siguientes alternativas, podemos utilizar que la figura que se forma es un cuadrado, por lo tanto C) es falsa, ya que habría que girar el punto (6, 5) en torno al (2, 5) en 90° en sentido horario y no antihorario.

Para D) si giramos el punto (6, 5) en 90° sentido antihorario con respecto al punto (6, 1) obtenemos el (2, 1), luego es verdadera. En conclusión, C) es falsa.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

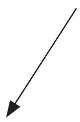
Visita nuestro portal educativo

1. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, ¿cuál de las siguientes alternativas representa mejor a su suma?



A) 

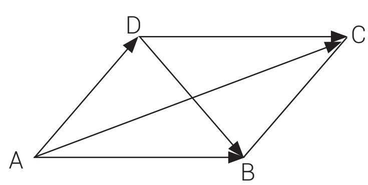
B) 

C) 

D) 

2. En la figura, ABCD es un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} =$

A) $\overrightarrow{AD}$
B) $2\overrightarrow{AD}$
C) $\overrightarrow{AB}$
D) $2\overrightarrow{AB}$



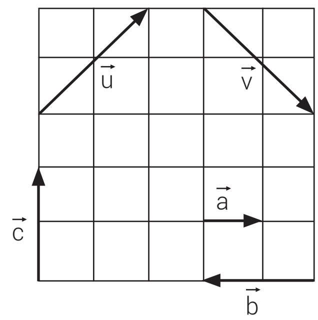
3. En la figura, si todos los cuadrados son congruentes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\vec{u} + \vec{v} = -2\vec{b}$

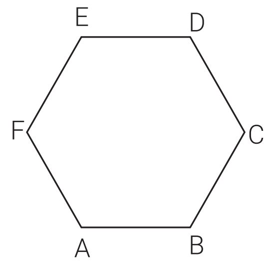
B) $\vec{c} + 2\vec{a} = \vec{u}$

C) $\vec{v} - \vec{u} = 2\vec{c}$

D) $\vec{b} + \vec{v} = -\vec{c}$



4. El polígono de la figura corresponde a un hexágono regular.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BD}$

B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FC}$

D) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$

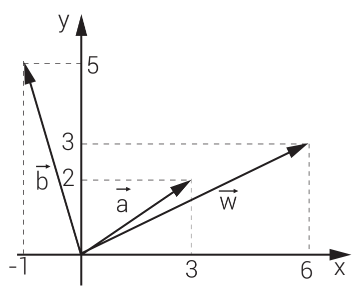
5. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{w}$, ¿qué vector hay que sumarle a $(\vec{a} - \vec{b})$ para que resulte $\vec{w}$?

A) (1, 5)

B) (2, 5)

C) (1, 6)

D) (2, 6)



6. Felipe tiene los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura y tiene que encontrar el número real μ tal que $\vec{a} + \mu\vec{b} = (5, 6)$, para ello sigue los siguientes pasos:

$\vec{a} + \mu\vec{b} = (5, 6)$

Paso 1

$(4, 2) + \mu(2, 4) = (5, 6)$

Paso 2

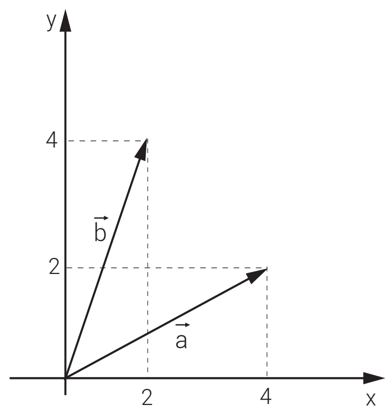
$(4, 2) + (2\mu, 4\mu) = (5, 6)$

Paso 3

$(4 + 2\mu, 2 + 4\mu) = (5, 6)$

Paso 4

$4 + 2\mu = 5 \rightarrow \mu = \frac{1}{2}$



¿En cuál de los siguientes pasos cometió un error?

A) En el paso 1.

B) En el paso 2.

C) En el paso 3.

D) En el paso 4.

12

7. Si $\vec{u} = (6,-3)$ y $(\vec{u} - \vec{v})$ está en el tercer cuadrante, ¿cuál de los siguientes vectores podría corresponder a $\vec{v}$?

A) $(2, 5)$
B) $(-2, -4)$
C) $(7, 2)$
D) $(10, -7)$

8. Sean los vectores $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (2, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 2)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\vec{u} - \vec{v} = -\vec{w}$
B) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{v} - \vec{w}$
C) $|\vec{u} + 2\vec{w}| = |\vec{v} - \vec{w}|$
D) $|\vec{u} + 2\vec{w}| = |\vec{u} + \vec{w}|$

9. ¿Cuál de los siguientes vectores tiene una longitud distinta a los demás?

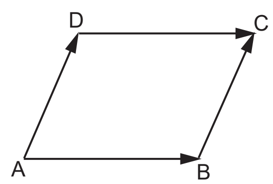
A) $(1, -\sqrt{5})$
B) $(-2, \sqrt{2})$
C) $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
D) $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

10. Sean los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$, tales que $\vec{p} + \vec{q} = (2, -5)$ y $\vec{p} - 2\vec{q} = (-4, 1)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\vec{p} - \vec{q} = (-2, -1)$
B) $\vec{p} + 2\vec{q} = (4, -7)$
C) $2\vec{p} - \vec{q} = (-2, -4)$
D) $\vec{p} - 3\vec{q} = (6, -5)$

11. En la figura, ABCD es un paralelogramo, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$
B) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$
C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$



12. Si el punto (–3, 5) se refleja en torno al eje y, queda en el punto

A) (3, –5)
B) (5, –3)
C) (–5, –3)
D) (3, 5)

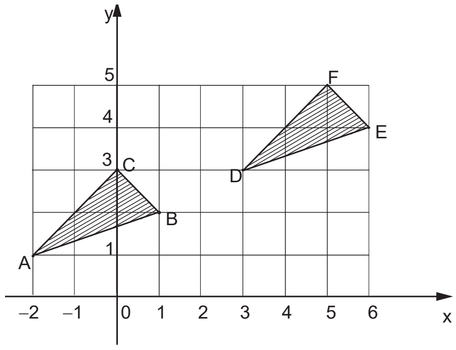
13. Si el punto (3, 2) se gira en 90° en sentido antihorario en torno al origen, entonces queda en el punto

A) (2, –3)
B) (3, –2)
C) (–2, –3)
D) (–2, 3)

14. El punto (2, 5) se traslada quedando en el punto (–3, 2), ¿cuál es la dirección de la traslación?

A) (–3, –5)
B) (3, 5)
C) (–5, –3)
D) (5, 3)

15. ¿En qué dirección se debe trasladar el ∆ABC para que se transforme en el ∆DEF?

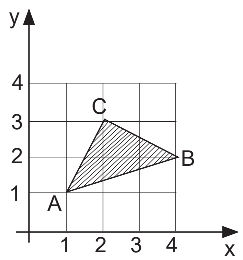


A) (5, 1)
B) (5, 2)
C) (2, 5)
D) (–5, –2)

16. ¿Cuáles de las siguientes transformaciones **NO** permiten que el punto (2, 2) quede en el punto (−2, 2)?

A) Reflexión en torno al eje x, seguida de una simetría puntual con respecto al origen.
B) Una traslación en la dirección (−4, 0).
C) Una traslación en la dirección (−4, −4), seguida de una reflexión con respecto al eje y.
D) Un giro en 90° en sentido antihorario respecto del origen.

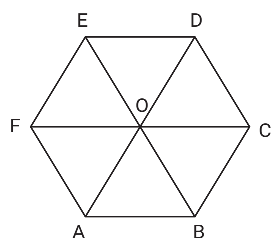
17. Si al ΔABC de la figura, se le aplica una traslación vertical de modo que el vértice C queda en el eje x, ¿cuáles serían las nuevas coordenadas de B?



A) (1, −2)
B) (3, −1)
C) (3, −2)
D) (4, −1)

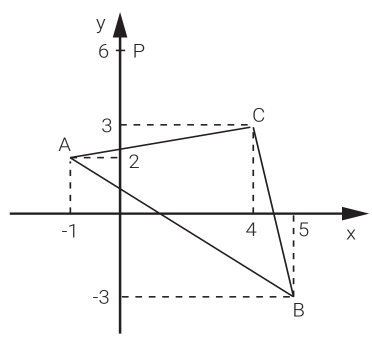
18. En la figura, ABCDEF es un hexágono regular de centro O, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $|\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD}| = 2|\overrightarrow{BC}|$
B) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}|$
C) $|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}|$
D) $|\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EO}| = |\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO}|$



19. Al ΔABC de la figura se aplica una traslación de modo que el vértice A queda en el punto P. ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

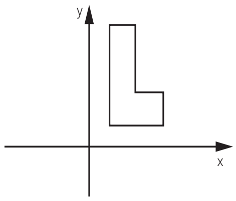
A) El punto B quedaría en el (6,1).
B) B y C quedarían en el primer cuadrante.
C) El punto C quedaría en el (5,7).
D) La dirección de traslación es el vector (4,1).



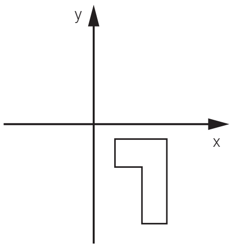
12

Editorial CID

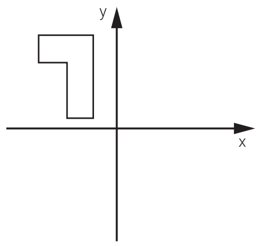
20. El polígono de la figura se le aplica una simetría respecto del eje y y después se le aplica una simetría puntual respecto del origen, ¿cuál de las siguientes opciones representa mejor el lugar donde queda ubicado este polígono después de aplicar estas transformaciones?



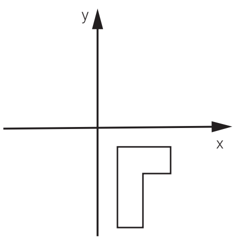
A)



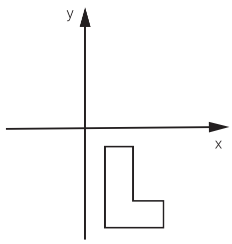
B)



C)

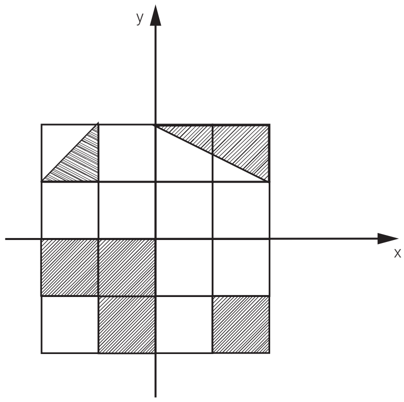


D)

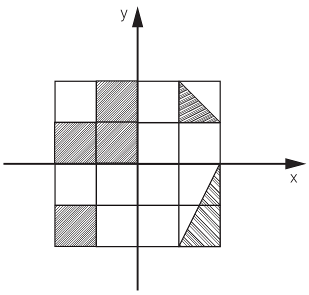


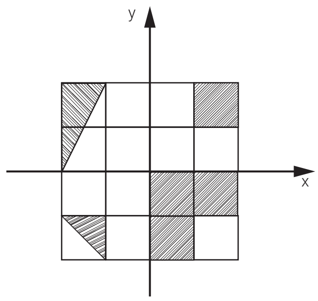
12

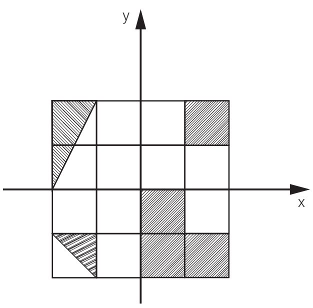
21. El centro del cuadrado se ubica en el origen del sistema cartesiano, tal como se muestra en la siguiente figura:

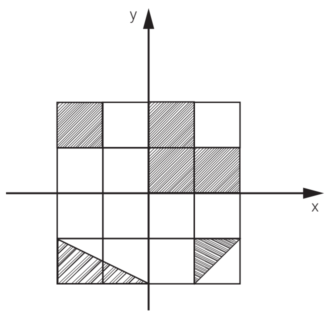


¿Cuál de las siguientes figuras **NO** se puede obtener de la figura anterior a través de un giro en torno al origen?

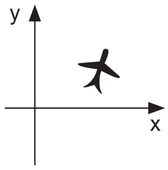
A) 

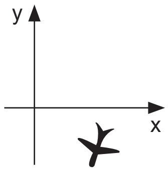
B) 

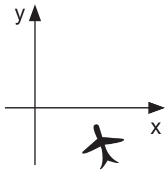
C) 

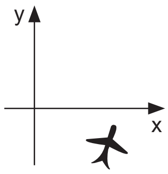
D) 

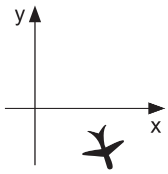
22. A la figura que está en el primer cuadrante se le aplica una reflexión con respecto al origen y después una reflexión con respecto al eje y. ¿Cuál de las siguientes alternativas ilustra la posición donde queda finalmente?



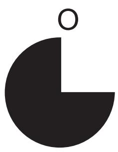
A) 

B) 

C) 

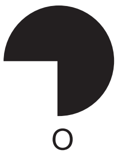
D) 

23. Al aplicar una rotación de centro en O en 180° a la figura, se obtiene:



A) 

B) 

C) 

D) 

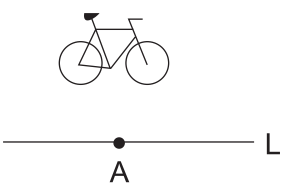
24. Los puntos (a, b) y (x, y) son simétricos respecto al eje y, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

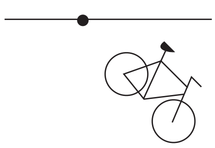
A) $a = x$
B) $b = -y$
C) $y = b$
D) $b = x$

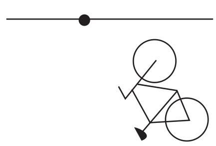
25. El punto (-2, 5) se traslada en la dirección $\vec{d} = (-a, b - a)$ quedando en el punto (5, -8), entonces $a + b =$

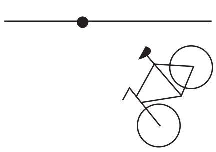
A) -11
B) -13
C) -19
D) -27

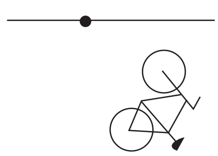
26. A la bicicleta de la figura se le ha aplicado primero un giro en sentido horario con centro en A en un ángulo de 30º y después una reflexión en torno a la recta L. ¿Cuál de las siguientes alternativas representa mejor a la posición donde queda?



A) 

B) 

C) 

D) 

27. El punto (−2, 3) se refleja en torno al origen quedando en el punto (a, b), entonces $a - b =$

A) −5
B) −1
C) 1
D) 5

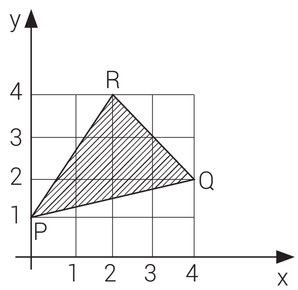
28. ¿Cuál de las siguientes transformaciones permite que el punto (−a, b) quede en el punto (b, a)?

A) Reflexión en torno al eje x.
B) Reflexión en torno al eje y.
C) giro en 90° en sentido horario con respecto al origen.
D) giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen.

29. ¿En qué dirección se debe trasladar el punto (a , b) para que quede en el punto (b, a)?

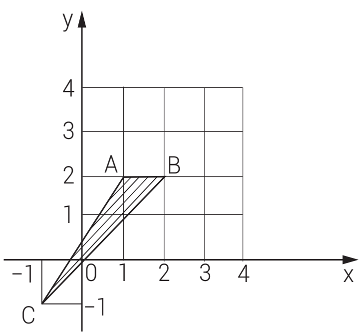
A) (b, a)
B) (−b , −a)
C) (a − b, b − a)
D) (b − a, a − b)

30. El triángulo PQR se ha trasladado dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo, ¿cuál de los siguientes puntos corresponde a uno de sus nuevos vértices?



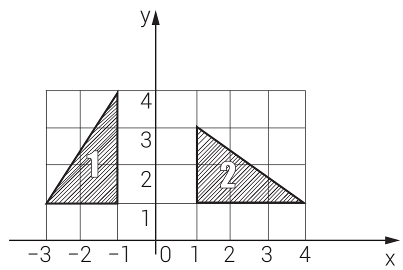
A) (0, 2)
B) (6, -1)
C) (4, 3)
D) (3, 4)

31. Si al triángulo ABC de la figura se le aplica una reflexión en torno al eje x, resulta un triángulo cuyos vértices son



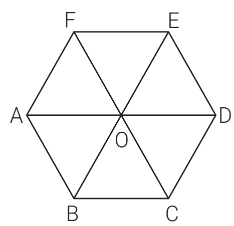
A) (1, -2) ; (2, -2) ; (-1, 1)
B) (-1, 2) ; (-2, 2) ; (1, 1)
C) (2, -1) ; (2, -2) ; (-1, 1)
D) (-1, -2) ; (-2, -2) ; (1, 1)

32. Con respecto a los triángulos rectángulos de la figura, ¿con cuál de las siguientes transformaciones isométricas el triangulo 1 **NO** queda en la posición del triangulo 2?



A) Un giro en 90° en sentido horario en torno al origen.
B) Un giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen y depués una simetría puntual con respecto al origen.
C) Con una traslación en la dirección (2, 0) y después un giro en 90° en sentido horario con respecto al punto (1, 1).
D) Una reflexión en torno al eje x y después una simetría con respecto al origen.

33. En la figura, el polígono corresponde a un hexágono regular cuyas diagonales se intersectan en el punto O, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) Si el ΔABO se gira en 120° en sentido antihorario en torno a O queda en la posición del ΔCDO.
B) Si al cuadrilátero ABOF se gira en 60° en sentido horario en torno a O queda en la posición del cuadrilátero EFOD.
C) Si al cuadrilátero ABCF se le aplica una simetría puntual con respecto a O se transforma en el cuadrilátero DEFC.
D) Si al cuadrilátero BCDO se gira en 60° en sentido horario en torno a O queda en la posición del cuadrilátero ABCO.

12

34. La profesora de Marta le pide resolver el siguiente problema: "Determina un punto A(a, b) de modo que si se traslada en la dirección (2, -4) queda en el punto (b, -a)". Marta resolvió el problema siguiendo los siguientes pasos:

(1) **Planteo**
(a, b) + (2, -4) = (b, -a)

(2) **Operación**
(a + 2, b – 4) = (b, -a)

(3) **Planteo de sistema de ecuaciones**

$$\left.\begin{array}{l} a + 2 = b \\ b - 4 = -a \end{array}\right|$$

(4) **Resolución del sistema de ecuaciones**
a = 1 y b = -3

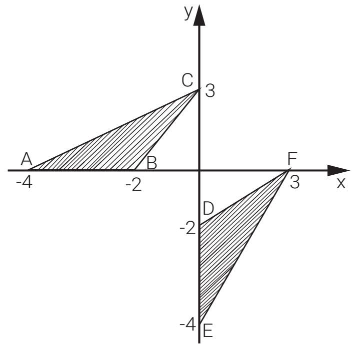
¿En cuál de los pasos cometió un error?

A) En el planteo.
B) En la operación.
C) En el planteo del sistema de ecuaciones.
D) En la resolución del sistema de ecuaciones.

35. ¿Con cuál de las siguientes parejas de transformaciones el punto (x, y) queda en el punto (-x – 2, y + 2)?

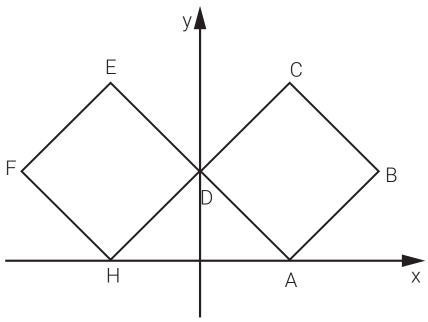
A) Una reflexión respecto al origen y después una traslación en la dirección (-2, 2).
B) Una traslación en la dirección (2, -2) y una simetría respecto del origen.
C) Una traslación en la dirección (-2, 2) y una reflexión en torno al eje y.
D) Una reflexión respecto del eje y y una traslación en la dirección (-2, 2).

36. ¿Con cuáles de las siguientes transformaciones isométricas el triángulo ABC se transforma en el triángulo EDF?



A) Con un giro en 90° en sentido horario respecto del origen.
B) Con un giro en 90° en sentido antihorario respecto del origen.
C) Con un giro en 90° en sentido antihorario respecto del origen seguido de una reflexión respecto del eje y.
D) Una reflexión en torno al eje x seguido de un giro en 90° en sentido horario respecto del origen.

37. Al cuadrado ABCD de la figura, se le ha aplicado una simetría axial con respecto al eje y, quedando en el cuadrado HFED. Si las coordenadas de A y D son respectivamente (a, 0) y (0, a), ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) ABCD se puede obtener a partir de EFHD aplicándole una simetría puntual con respecto al punto D.
B) HDEF se puede obtener a partir de ABCD trasladándolo en la dirección del vector (-2a,0).
C) ABCD se puede obtener a partir de EFHD girándolo en 270° en sentido antihorario con respecto al punto D.
D) HDEF se puede obtener a partir de ABCD aplicándole una traslación según el vector $-\overrightarrow{HA}$.

38. Al punto A se le aplica una traslación según el vector (-a, b) y después se refleja en torno al eje y quedando en el punto (a, -b), entonces las coordenadas del punto A son

A) (0, b)
B) (0, 2b)
C) (0, -2b)
D) (2a, 0)

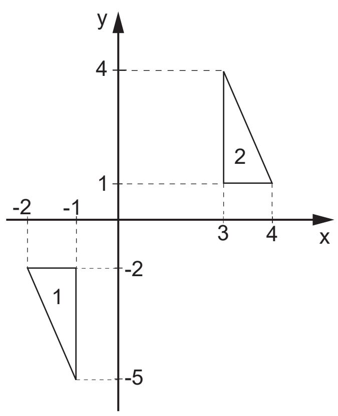
39. Si se rota el punto (4, 3) en 90° en sentido horario con respecto al origen y luego se refleja respecto al eje y, sería equivalente a

A) hacer una traslación con dirección (−4, −3).
B) hacer un giro en 270° en torno al origen en sentido antihorario.
C) hacer una rotación en 90° en torno al origen en sentido antihorario.
D) hacer una reflexión en torno a la recta x + y = 0.

40. Al aplicar al punto (8, 5) una simetría central con centro en (−2, 4) se obtiene:

A) (6, 9)
B) (4, 3)
C) (−5, 8)
D) (−12, 3)

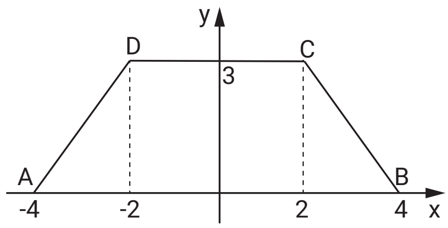
41. Con respecto a la información dada en la figura, ¿cuál de las siguientes transformaciones **no** permite que la fig. 1 se obtenga a partir de la fig. 2?



A) Con una simetría con respecto a un punto que no es el origen.
B) Con dos simetrías axiales.
C) Con una traslación y con un giro en 180°.
D) Con una simetría respecto del eje x y luego una simetría con respecto a una recta vertical.

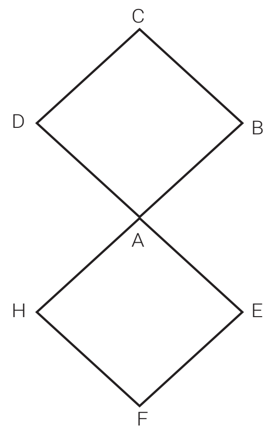
12

42. En la figura, el cuadrilátero ABCD corresponde a un trapecio, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



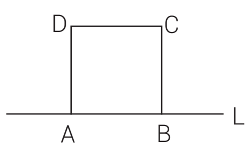
A) Si $\overline{AC}$ se refleja en torno al eje y queda en la posición de $\overline{BD}$.
B) Si el ΔABC se refleja en torno al eje y queda en la posición del ΔBAD.
C) Si A se traslada en la dirección $2\overrightarrow{DC}$ queda en el punto B.
D) Si D se refleja en torno al punto medio de $\overline{AC}$, queda en el punto B.

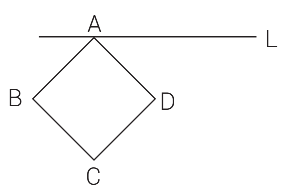
43. Los cuadrados HFEA Y ABCD de la figura son congruentes y son tales que los vértices F, A y C son colineales. ¿Cuál de las siguientes transformaciones isométricas **NO** permiten que uno de los cuadrados se transforme en el otro?

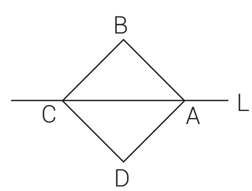


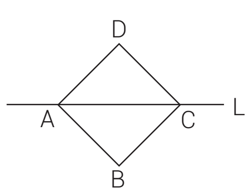
A) ABCD se traslada en la dirección del vector $\overrightarrow{CA}$.
B) HFEA se gira en 180° en torno al punto A.
C) HFEA se le aplica dos simetriales axiales sucesivas, la primera con respecto a la recta AH y la segunda con respecto a la recta AD.
D) HFEA se traslada en la dirección del vector $\overrightarrow{EA}$ y después un giro en 270° en sentido horario con respecto al punto A.

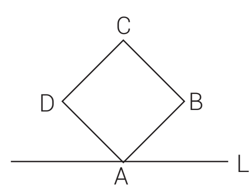
44. El cuadrado ABCD de la figura, tiene su lado $\overline{AB}$ sobre la recta horizontal L.
Si el cuadrado si gira en 30°, con respecto al punto A, en sentido antihorario y después se gira en 75° en sentido horario con respecto al mismo punto, ¿cuál de las siguientes figuras indica mejor la posición donde queda el cuadrado después de aplicar estas dos rotaciones?



A) 

B) 

C) 

D) 

45. Si $x \neq y$, ¿cuál de las siguientes opciones **no** permite que el punto (x, y) se transforme en el $(x, -y)$?

A) Una reflexión con respecto al origen y después una reflexión en torno al eje y.
B) Una traslación en la dirección $(0, -2y)$.
C) Un giro en 180° con respecto al origen y después una traslación en la dirección $(2x, 0)$
D) Un giro en 90° en sentido horario con respecto al origen.

46. Un punto se traslada en la dirección (2, 2) y después se gira en 90° en sentido antihorario con respecto al origen quedando en el punto $(-a, a + 2)$, entonces el punto original era el

A) $(a, a + 2)$
B) $(a, a - 2)$
C) $(a - 2, a)$
D) $(-a, a - 2)$

47. Al segmento AB se le aplica la siguiente composición de isometrías: una rotación respecto del origen en 90°, en sentido antihorario, luego una traslación según el vector $(2c, 2c)$, obteniéndose el segmento A'B', donde A' es la imagen de A. Si $A'(c, 2(c + 1))$, ¿cuál de las siguientes coordenadas corresponden al punto A?

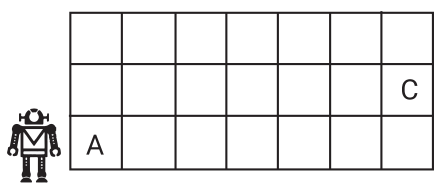
A) $(c, 2)$
B) $(2, c)$
C) $(2, -c)$
D) $(-2, 3c)$

48. Al triángulo ABC de vértices A(4, 5) , B(4, 2) y C(1, 4) se le aplica una simetría central con respecto al punto P(0,1), ¿cuál de los siguientes puntos **NO** corresponde a uno de los vértices del triángulo resultante?

A) (-4, -3)
B) (-4, 0)
C) (-2, -1)
D) (-1, -2)

49. Un robot puede avanzar solamente a la derecha o hacia arriba, para ello se utilizan los comandos: D_n : indica que avanza "n" casillas a la derecha y A_n: indica que avanza "n" casillas hacia arriba.
Si el robot de la figura debe tomar una ficha en la casilla A y llevarla a la casilla C, ¿cuál de las siguientes secuencias de comandos **NO** permite que el robot llegue al destino correcto?

A) $D_4 \rightarrow A_1 \rightarrow D_2$
B) $A_1 \rightarrow D_4 \rightarrow D_2$
C) $D_2 \rightarrow A_2 \rightarrow D_4$
D) $D_5 \rightarrow A_1 \rightarrow D_1$



50. ¿Con cuáles de las siguientes transformaciones el punto (x, y) **NO** queda en el punto (y, x)?

A) Rotación con centro en el origen en 270° en sentido antihorario y después una reflexión en torno al eje x.

B) Una traslación en la dirección (y – x, x – y).

C) Reflexión con respecto al punto $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$.

D) Una reflexión en torno al origen y después una traslación en la dirección (x + y, y – x).

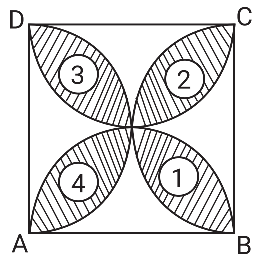
51. Sobre los lados del cuadrado ABCD de la figura, se han construido semicircunferencias, generándose con las intersecciones, cuatro "pétalos" como se muestra en la figura.
Si O es el centro del cuadrado y el pétalo 1 se gira en torno a este punto en sentido antihorario, ¿con cuál de los siguientes ángulos de giro, el "pétalo 1" **NO** queda en la posición de cualquiera de los otros "pétalos"?

A) 450°

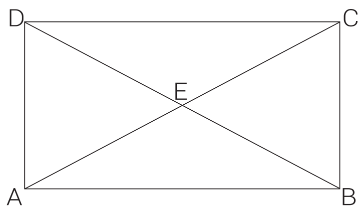
B) 540°

C) 585°

D) 990°



52. ABCD es un rectángulo y E es el punto de intersección de las diagonales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



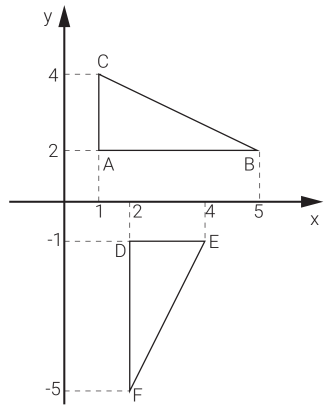
A) Si a $\overline{AD}$ se le aplica una simetría puntal respecto a E se transforma en $\overline{CB}$.

B) Si el ΔABC se refleja en torno al punto E se transforma en el ΔCDA.

C) Si el ΔBCD se refleja en torno a $\overleftrightarrow{BD}$ se transforma en el ΔBAD.

D) Si $\overline{AC}$ se gira en torno a E en el ángulo AEB en sentido antihorario queda en la posición de $\overline{BD}$.

53. ¿Con cuáles de las siguientes transformaciones isométricas el triángulo ABC **NO** queda en la posición del triángulo EDF?

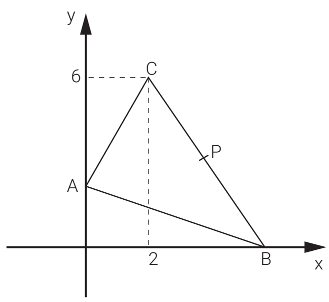


A) Giro en 90° en sentido horario con respecto al origen.
B) Traslación según el vector (1, -3) y después un giro en 90° en sentido horario con respecto al punto D.
C) Giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen y después una simetría puntual respecto al origen.
D) Traslación en la dirección (3, -3) y después un giro en 90° en torno a E en sentido horario.

54. Sea A el punto de coordenadas (p, q), con $pq \neq 0$, si este punto se refleja en torno al origen y después se le aplica una simetría axial con respecto a la recta de ecuación $x = 2p$, entonces A queda en un punto de coordenadas

A) (2p, q)
B) (3p, -q)
C) (5p, -q)
D) (-p, 4p – q)

55. El triángulo ABC de la figura tiene dos vértices cuyas coordenadas son (6, 0) y (0, 2). Si al vértice B se le aplica una simetría puntual con respecto al punto P se obtiene el vértice C, entonces si al punto A se le aplica esta misma simetría puntual, entonces queda en el



A) (8, 4)
B) (4, 8)
C) (8, 6)
D) (6, 8)

56. ¿Cuál de las siguientes transformaciones **no** permite que el punto A(−a , a) quede en el punto A'(−a,−a)?

A) Traslación en la dirección (0, −2a).
B) Rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al origen.
C) Rotación en 90° en sentido horario con respecto al punto (−2a,0).
D) Rotación en 45° en sentido antihorario con respecto al punto (a, a).

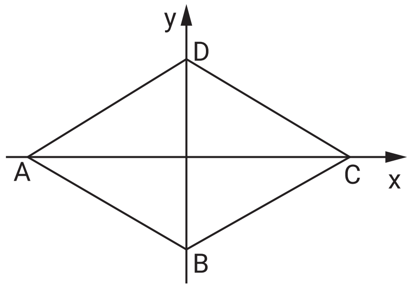
57. Si el punto A(c, d) se gira en 90° en sentido antihorario con respecto al punto P(a, b), entonces queda en el

A) (-d, c)
B) (c – b, a + d)
C) (b – d, c – a)
D) (a + b – d, b + c – a)

58. Al punto A(−3, 2) se le aplica una traslación de modo que su imagen queda en el eje y a la misma distancia del origen que se encuentra A. ¿cuál es una posible dirección para esta traslación?

A) $(-3, 2 - \sqrt{13})$
B) $(3, \sqrt{13} - 2)$
C) $(-3, -3)$
D) $(3, \sqrt{5} - 2)$

59. El cuadrilátero de la figura tiene como vértices a los puntos $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(0, -1)$, $C(\sqrt{3}, 0)$ y $D(0, 1)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) Si A se gira en 60° en sentido antihorario en torno a D queda en el punto B.
B) Si $\overline{DA}$ se gira en 120° en sentido antihorario en torno a D queda en la posición de $\overline{DC}$.
C) Si $\overline{CD}$ se gira en 90° en torno al origen en sentido antihorario queda en $\overline{DA}$.
D) Si $\overline{AB}$ se gira en 180° en torno al origen queda en la posición de $\overline{CD}$.

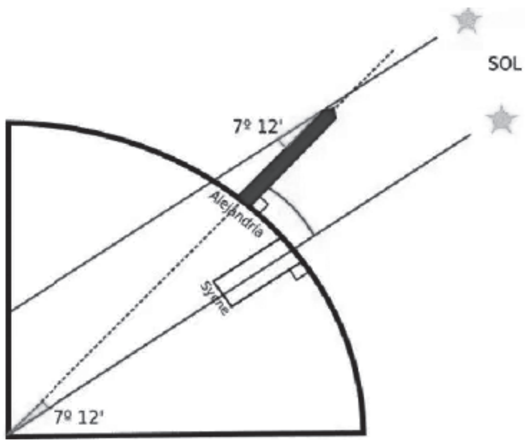
60. Carolina y Belén crean un juego de movimientos dibujando un plano cartesiano en el suelo, de manera que pueden indicar su ubicación utilizando pares ordenados. Las indicaciones del juego son: primero, rotar 90° en sentido antihorario respecto al origen, luego, realizar una simetría axial respecto al eje y y por último, otra simetría axial respecto al eje x . Al comenzar el juego, Carolina se encuentra en el punto (a, b) y Belén en el punto (c, d), con a , b , c y d números reales mayores que cero y distintos entre sí. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** respecto a las ubicaciones de Carolina y Belén durante el juego?

A) Carolina termina el juego en el cuarto cuadrante.
B) Carolina termina el juego a la misma distancia del origen que cuando partió.
C) La distancia con la que terminaron el juego es la misma que cuando partieron.
D) Belén termina el juego a una distancia distinta del origen que cuando partió.

12

Capítulo 13

GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN



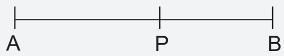
Eratóstenes, sabio griego (276 a.C- 294 a. C) utilizando geometría elemental y una simple proporción, pudo concluir que el radio de la Tierra es de 6366 km, muy cercano al valor real que es aproximadamente 6371 km.

CONCEPTOS CLAVES

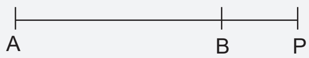
- Teorema de Thales
- Razón de Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Escalas de mapas

DIVISIÓN INTERIOR Y EXTERIOR DE UN TRAZO

Si P divide interiormente al trazo AB en una razón λ, se entenderá que $\frac{AP}{PB} = \lambda$



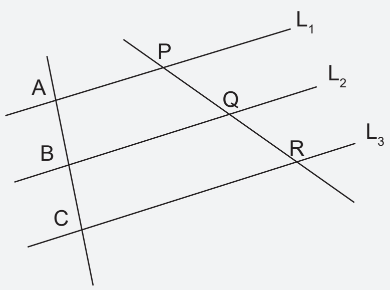
Si P divide exteriormente al trazo AB en una razón λ, se entenderá que $\frac{AP}{PB} = \lambda$ (*)



(*) Nota: si $\lambda < 1$, entonces P se ubicará a la izquierda de A y si $\lambda > 1$ se ubicará a la derecha de B, tal como se muestra en la figura.

TEOREMA DE THALES

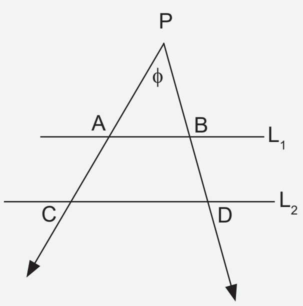
Si tenemos un conjunto de rectas paralelas y estas son cortadas por dos rectas, entonces las longitudes de los segmentos que se determinan sobre una de las rectas secantes son proporcionales a las longitudes de los segmentos que se determinan sobre la otra recta secante.



Si $L_1 // L_2 // L_3$, entonces:

$$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}}$$

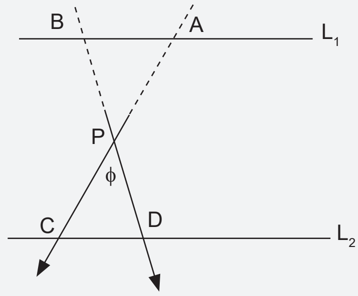
Teorema particular de Thales
Si los lados de un ángulo se cortan por dos o más paralelas entre sí, las longitudes de los segmentos que se determinan sobre una de las transversales son proporcionales a las longitudes de los segmentos que se determinan sobre la otra transversal.



$$\boxed{\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}}$$

$(L_1 // L_2)$

Lo anterior, también es válido si las rectas cortan a las prolongaciones de los lados del ángulo:

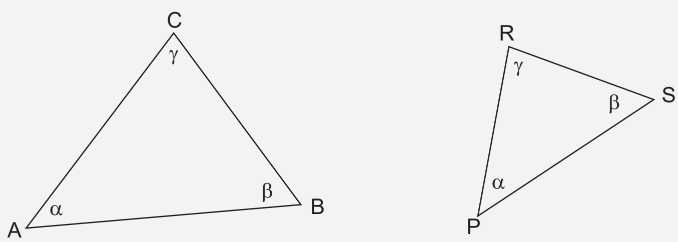


$(L_1 \parallel L_2)$

$$\boxed{\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes, si se puede establecer una correspondencia entre los vértices de modo que sus ángulos homólogos son congruentes y los lados homólogos son proporcionales:



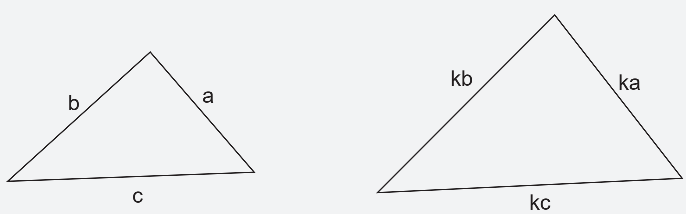
$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta PSR}$$

Tenemos que $\frac{AB}{PS} = \frac{BC}{SR} = \frac{AC}{PR} = k$, donde "k" es un número real positivo llamado "razón de semejanza".

Los criterios de semejanza, corresponden a la información mínima necesaria para establecer que dos triángulos son semejantes.

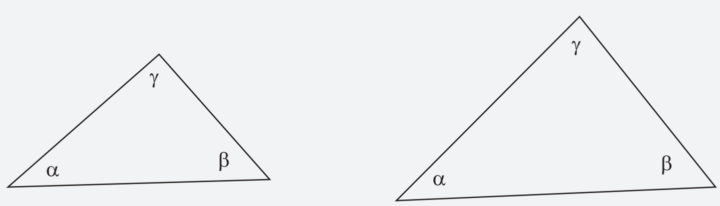
- **Criterio L – L – L**

Dos triángulos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.



- **Criterio A – A – A**

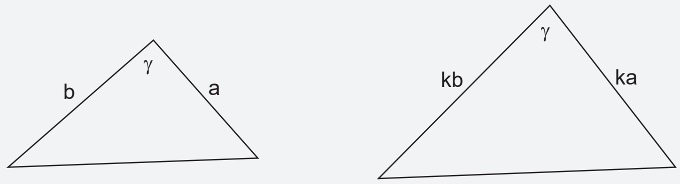
Dos triángulos son semejantes si sus ángulos homólogos son congruentes.



13

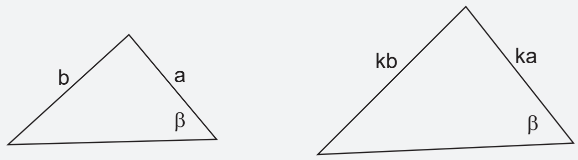
- **Criterio L – A – L**

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos que forman estos lados congruentes.



- **Criterio L – L – A**

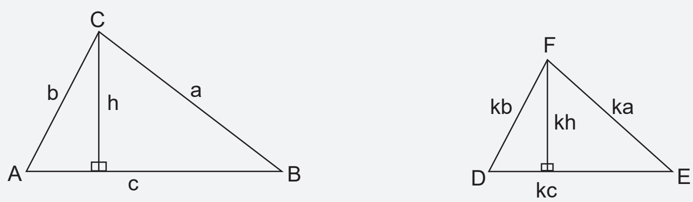
Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados congruentes.



(b > a)

Teorema de la semejanza

Si dos triángulos son semejantes, con razón de semejanza “k”, entonces sus perímetros también están en la razón k y sus áreas están en la razón k^2.



Observa en la figura que la razón entre los perímetros es efectivamente k:

$$\frac{\text{Perímetro } \Delta DEF}{\text{Perímetro } \Delta ABC} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = k$$

Y la razón entre sus áreas es k^2:

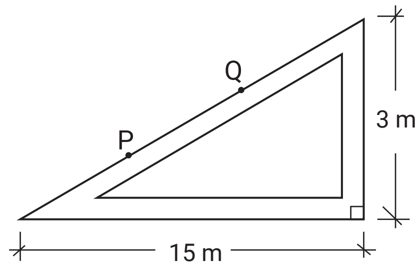
$$\frac{\text{Área } \Delta DEF}{\text{Área } \Delta ABC} = \frac{\frac{kh \cdot kc}{2}}{\frac{hc}{2}} = k^2$$

Observación: este teorema nos permite encontrar la razón entre los perímetros o las áreas de dos figuras semejantes si conocemos la razón entre dos elementos homólogos.

EJERCICIOS RESUELTOS

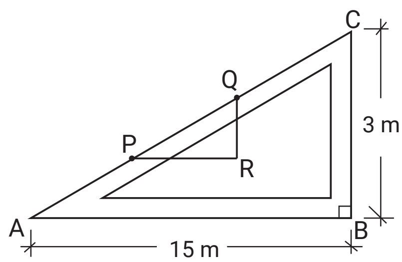
1. En la figura, se muestra la vista lateral de un techo, ¿cuánto se debe avanzar horizontalmente para ir desde el punto P al punto Q, si Q está a 2 m más alto que Q?

A) 6 m
B) 10 m
C) 12 m
D) 15 m



Solución:

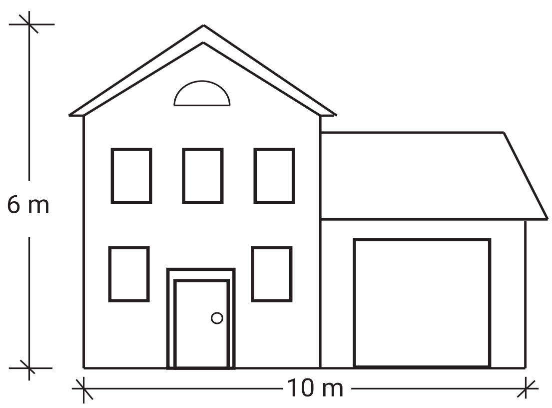
Si trazamos una linea horizontal por P y una vertical por Q tenemos la siguiente situación:



Tenemos entonces que el triángulo ΔPRQ es semejante al triángulo ABC y QR = 2 m, entonces:

$\frac{PR}{RQ} = \frac{AB}{BC} \leftrightarrow \frac{PR}{2} = \frac{15}{3} \leftrightarrow$ PR = 10 m, respuesta B).

2. Pablo un arquitecto, hará un plano de la casa cuya fachada se muestra a continuación. Si el plano lo hará a escala 1 : 50, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El ancho de la casa en el plano será de 20 cm.
B) El alto de la casa en el plano será de 12 cm.
C) Si el área de la puerta de entrada es 3 m^2, entonces en el plano será de 12 cm^2.
D) Si la cantidad de vidrio de todas las ventanas es 12 m^2, en el plano será de 0,48 m^2.

Solución:

En A), como la escala es 1 : 50, debemos dividir la longitud real por 50 para obtener la longitud en el plano, como 10 m = 1000 cm, dividimos 1000 : 50 = 20, luego A) es verdadera.

En B), efectuando el mismo análisis que en A), 6 m = 600 cm, 600 : 50 = 12 cm, luego B), también es verdadera.

Como C) hace alusión a áreas, ocuparemos que la razón entre las áreas del objeto real y en el plano corresponde al cuadrado de la escala, como 3 m^2 = 30000 cm^2, tenemos:

$$\frac{\text{área puerta en el plano}}{\text{área puerta en la realidad}} = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \leftrightarrow \frac{x}{30.000} = \frac{1}{2.500} \leftrightarrow x = 12\ cm^2\text{, luego C) es verdadera.}$$

Para D), ocuparemos la misma estrategia que en C):

$$\frac{\text{área puerta en el plano}}{\text{área puerta en la realidad}} = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \leftrightarrow \frac{x}{120.000} = \frac{1}{2.500} \leftrightarrow x = 48\ cm^2\text{, como } 10.000\ cm^2 = 1m^2\text{, entonces}$$

48 cm^2 = 0,0048 m^2, luego D) es falsa.

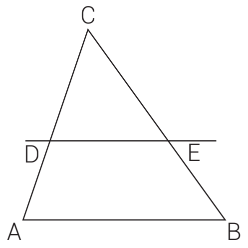
3. En la figura, las rectas AD y BE se intersectan en C y $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$.
Si CE = 10 cm, BE = 5 cm y área ΔDEC = 60 cm^2, ¿cuál es el área del trapecio ABED?

A) 30 cm^2

B) 75 cm^2

C) 90 cm^2

D) 135 cm^2



Solución:

Tenemos que los triángulos ABC y DEC son semejantes (A, A, A), además como CE : EB = 2 : 1, entonces CE : CB = 2 : 3, por lo tanto la razón de semejanza entre estos triángulos es 2 : 3 y por el teorema de la semejanza la razón entre sus áreas será 4 : 9. Como el área del DEC es 60 cm^2, planteamos una proporción:

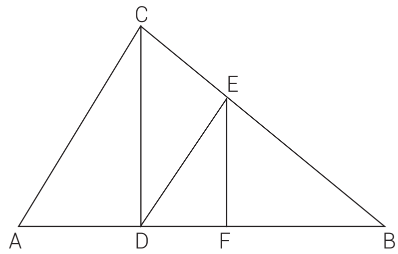
$$\frac{\text{área } \Delta DEC}{\text{área } \Delta ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{60}{\text{área } \Delta ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \text{área } \Delta ABC = \frac{9 \cdot 60}{4} = 135\ cm^2$$

Como área ΔABC = 135 cm^2 y área ΔDEC = 60 cm^2 $\rightarrow$ área ABED = 135 − 60 = 75 cm^2, respuesta B).

13

4. El ABC de la figura es rectángulo en C, los puntos D y F están en $\overline{AB}$ y E en $\overline{BC}$, de modo que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ y $\overline{EF} \perp \overline{AB}$. Si CD = 9 cm y EF = 4 cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{DE}$?

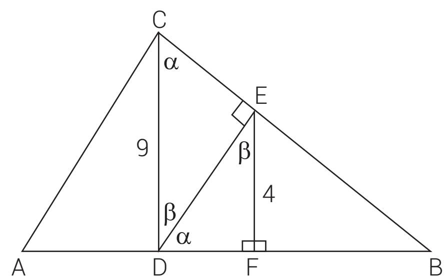
A) 5 cm
B) 6 cm
C) 7,5 cm
D) 8 cm



Solución:

Tal como se muestra en la siguiente figura, los triángulos CED y DFE son semejantes por tener sus ángulos homólogos congruentes.

Si ∢DCE = α y ∢CDE = β, entonces ∢EDF = α y ∢DEF = β:



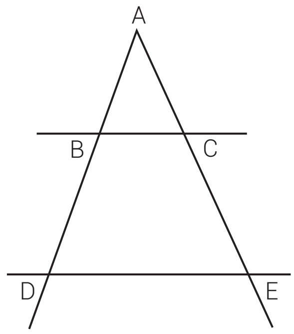
Por la semejanza de triángulos, tenemos que:

$\frac{CD}{DE} = \frac{ED}{FE} \rightarrow \frac{9}{DE} = \frac{ED}{4}$, multiplicando cruzado, tenemos que $DE^2 = 36 \rightarrow DE = 6$ cm , resuesta B).

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. En la figura, las rectas DB y CE se intersectan en A y $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$. Si BC = 2 cm, DE = 5 cm y BD mide un cm más que AB, entonces AB mide



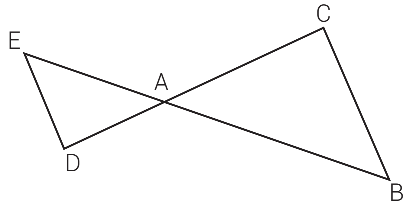
A) 1 cm

B) $\frac{2}{3}$ cm

C) 2 cm

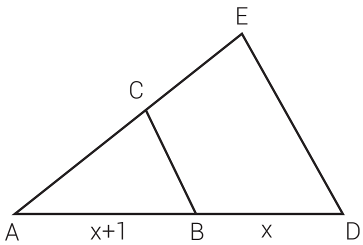
D) 3 cm

2. En la figura, los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$ se intersectan en el punto A. Si $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, DA = 4 cm, DC = 12 cm y BC = 6 cm, entonces DE mide



A) 1,5 cm
B) 2 cm
C) 3 cm
D) 12 cm

3. En la figura, $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$ y C y B pertenecen respectivamente a $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$. Si AC = 8 cm y CE = 6 cm, entonces x =



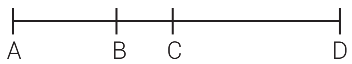
A) 2 cm

B) 3 cm

C) 4 cm

D) 5 cm

4. En la figura, C es punto medio de $\overline{AD}$ y AB : BC = 3 : 1. Si AD = 32 cm, entonces la medida de $\overline{BC}$ es

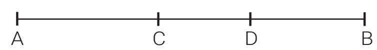


A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 12 cm

5. En la figura, AP : PB = 2 : 1 y PB : PC = 2 : 3, si AC = 36 cm, entonces AP =

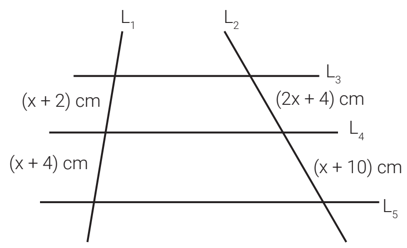
A) 8 cm
B) 12 cm
C) 16 cm
D) 24 cm

6. En el trazo AB de la figura, AC : CD = 3 : 2 y CD : DB = 1 : 2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



A) AC : DB = 1 : 2
B) AD : DB = 5 : 2
C) AC : CB = 2 : 1
D) AD : CB = 5 : 6

7. En la figura, las rectas L_1 y L_2 intersectan a las rectas L_3, L_4 y L_5.

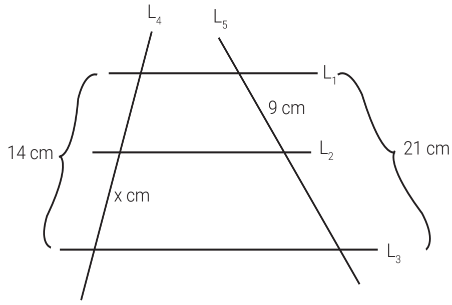


¿Cuánto debe valer x para que las rectas L_3, L_4 y L_5 sean paralelas?

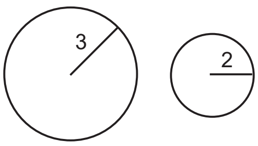
A) 2 cm
B) 4 cm
C) 8 cm
D) 16 cm

8. En la figura, L_1, L_2 y L_3 son paralelas y L_4 y L_5 son secantes a ellas. Según los datos dados, ¿cuánto mide x?

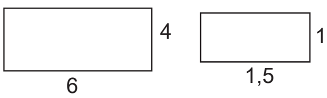
A) 6 cm
B) 7 cm
C) 8 cm
D) 12 cm



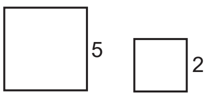
9. ¿En cuál de las siguientes parejas de figuras, **NO** existe una semejanza entre ellas? (las medidas están en cm)

A) 

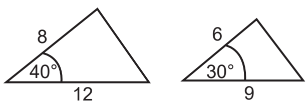
(dos circunferencias)

B) 

(dos rectángulos)

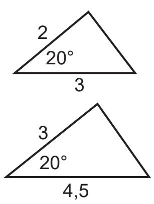
C) 

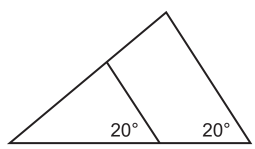
(dos cuadrados)

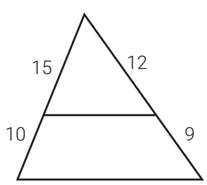
D) 

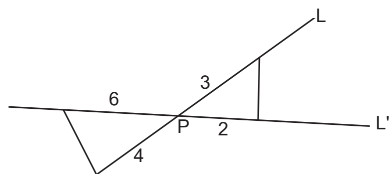
(dos triángulos)

10. ¿En cuál de las siguientes situaciones los dos triángulos **NO** son semejantes?

A) 

B) 

C) 

D) 

(L y L' se cortan en P)

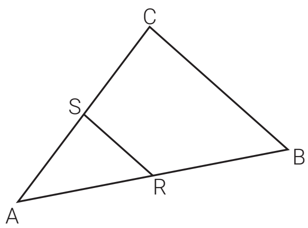
13

11. Un poste vertical de 2,7 metros de alto, proyecta una sombra en el suelo de 1,8 metros y en ese mismo instante un niño cercano a él, parado verticalmente al suelo, proyecta una sombra de 80 cm, ¿cuál es la estatura del niño?

A) 90 cm
B) 100 cm
C) 120 cm
D) 150 cm

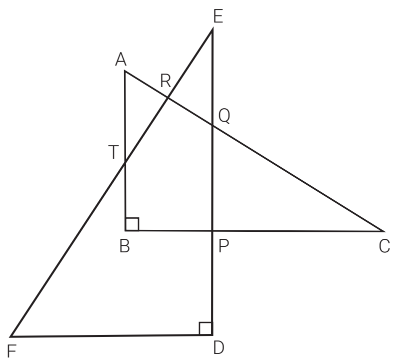
12. En el triángulo ABC de la figura, R y S pertenecen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\overline{SR}$ // $\overline{CB}$, AR : RB = 2 : 3 y SR = 180 cm, entonces $\overline{BC}$ mide

A) 240 cm
B) 270 cm
C) 360 cm
D) 450 cm

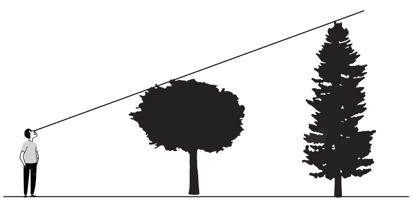


13. En la figura, la intersección de $\overline{ED}$ con $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los puntos Q y P respectivamente, la intersección de $\overline{EF}$ con $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son los puntos R y T respectivamente. Si $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ y $\overline{FE} \perp \overline{AC}$, cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $\Delta FDE \sim \Delta QPC$
B) $\Delta ART \sim \Delta QPC$
C) $\Delta FDE \sim \Delta ART$
D) Todas las anteriores.



14. Felipe se detiene a observar dos árboles de modo que las cimas de ellos queden alineados con él, tal como se muestra en la figura:



Felipe tiene una altura de 1,8 metros, el árbol más cercano a él tiene una altura de 3,8 m. Si Felipe se encuentra a 4 m del primer árbol y a 6 m del segundo, ¿cuál es la altura del segundo árbol?

A) 3 m
B) 4, 8 m
C) 5 m
D) 6,8 m

15. Camila tiene una altura de 1,8 metros y está a 5 metros de un poste de luz vertical de 4,5 metros de altura, entonces la longitud de la sombra de Camila que produce este poste es

A) $\frac{1}{2}$ m

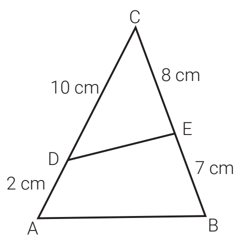
B) 2 m

C) 3 m

D) $\frac{10}{3}$ m

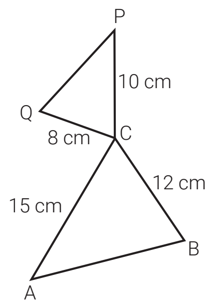
16. ¿En cuál(es) de las siguientes situaciones **NO** se cumple siempre la semejanza de los triángulos indicados?

A)



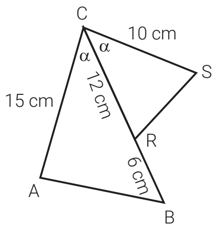
D y E pertenecen a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.
$\Delta ABC \sim \Delta EDC$

B)



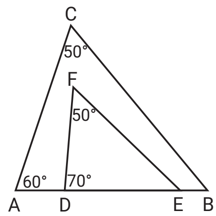
$\Delta ABC \sim \Delta PQC$

C)



R pertenece a $\overline{CB}$.
$\Delta ABC \sim \Delta SRC$

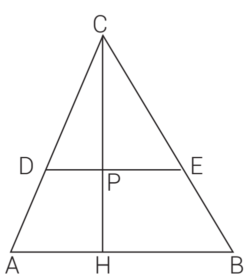
D)



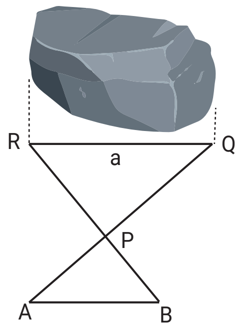
D y E pertenecen a $\overline{AB}$
$\Delta ABC \sim \Delta EDF$

17. En la figura, $\overline{CH}$ es la altura del triángulo ABC y los puntos D y E están en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de este triángulo, de modo que $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$. Si las rectas CH y DE se intersectan en P, DE = 16 cm, CP : PH = 2 : 1, entonces AB mide

A) 18 cm
B) 24 cm
C) 30 cm
D) 32 cm



18. Para calcular el ancho "a" de una roca, Felipe camina desde el punto A al punto B, paralelamente a RQ, posteriormente traza en el piso las rectas AQ y BR determinando el punto P. Si las distancias PR, PB y AB son 6 m, 4 m y 5 m respectivamente, ¿cuál es el ancho "a" de la roca?



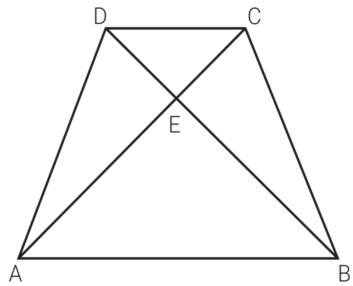
A) $3,\overline{3}$ m

B) 6 m

C) 7 m

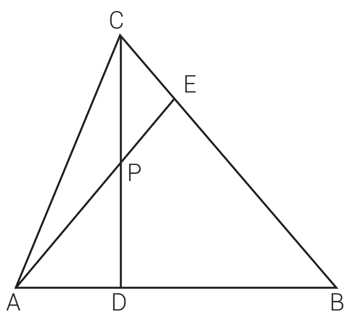
D) 7,5 m

19. En la figura, ABCD es un trapecio, donde las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 12 cm y 4 cm respectivamente. Si BD = 18 cm, entonces $\overline{DE}$ mide



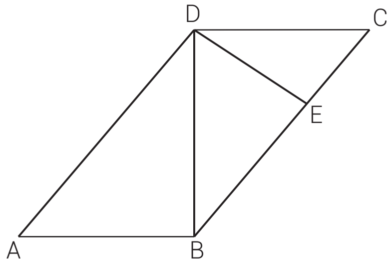
A) 3 cm
B) 4,5 cm
C) 6 cm
D) 9 cm

20. En la figura, $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son alturas del ΔABC, si AD = 3 cm, PD = 4 cm y CE = 2 cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{PC}$?



A) 1,2 cm
B) 2,5 cm
C) $2,\overline{6}$ cm
D) $3,\overline{3}$ cm

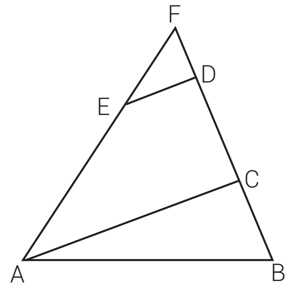
21. En la figura, ABCD es un paralelogramo, E pertenece al lado $\overline{BC}$ y los ángulos ABD y DEC son rectos. Si AB = 6 cm, BD = 8 cm, entonces $\overline{DE}$ mide



A) 4,2 cm
B) 4,8 cm
C) 4,0 cm
D) 6,0 cm

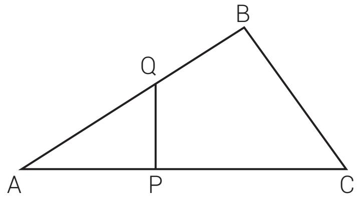
22. En la figura, C y D pertenecen a $\overline{BF}$, $\overline{ED}$ // $\overline{AC}$ y $\overline{AC} \perp \overline{BF}$. Si ED = 4 cm, DC = 6 cm, AB = 13 cm y BC = 5 cm, entonces EF =

A) 5 cm
B) 6 cm
C) $2\sqrt{13}$ cm
D) $2\sqrt{5}$ cm



23. En la figura, los ángulos APQ y ABC son rectos y los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si BQ = 1 cm y AQ = BC = 3 cm entonces $\overline{AP}$ mide

A) 1,8 cm
B) 2 cm
C) 2,4 cm
D) 3,2 cm

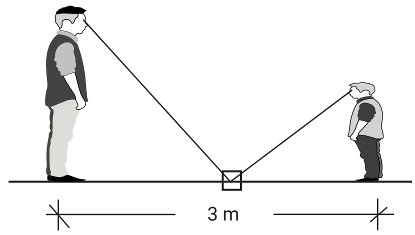


24. Si $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, donde $\overline{AB}$ es el homólogo de $\overline{PQ}$ y $\overline{BC}$ es el homólogo de $\overline{QR}$ y AB : PQ = 3 : 5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si PR = 20 cm, entonces AC = 12 cm.
B) El perímetro del ΔABC es un 60% del perímetro del ΔPQR.
C) El área del ΔABC es un 36% del área del ΔPQR.
D) Si $\sphericalangle CAB = 15°$, entonces $\sphericalangle RPQ = 25°$.

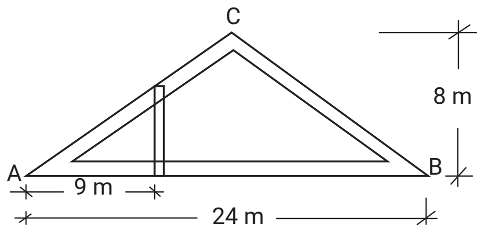
25. En la figura se muestra a dos hermanos: Luis y Pedro, entre ellos pusieron un espejo donde a través de él podian observar mutuamente sus ojos. Si Luis tiene una altura de 1,5 m y se encuentra a 1,8 m del espejo, ¿qué estatura tiene su hermano?

A) 0,8 m
B) 1,0 m
C) 1,2 m
D) 1,6 m



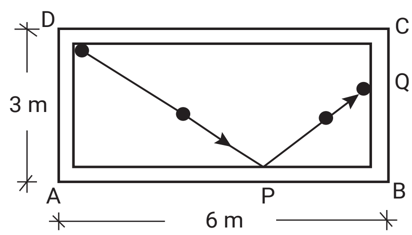
26. Una cercha es una estructura que soporta el techo de una construcción, en la cercha de la figura, el ΔABC es isósceles de base $\overline{AB}$, según la información dada, ¿cuál es el largo de un listón perpendicular a la base, que se encuentra a 9 m del punto A?

A) 4 m
B) 4,5
C) 5 m
D) 6 m



27. En la figura, se ha representado una mesa de pool por el rectángulo ABCD. Una bola parte del vértice D, golpea al lado $\overline{AB}$ en P y finalmente llega al punto Q que está a 1 m de C, si consideramos que el ángulo con que golpea la bola al lado es el mismo con que sale expelida, ¿a que distáncia se encuentra el punto P del vértice A? (supón que el grosor entre los dos rectángulos de la figura es despreciable)

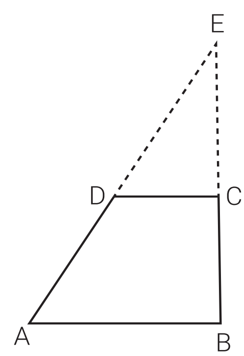
A) 2,4 m
B) 3,0 m
C) 3,2 m
D) 3,6 m



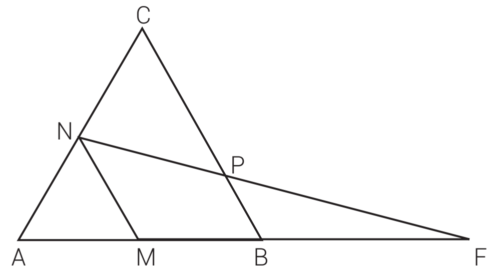
13

28. En la figura, se ilustra el sitio ABCD que tiene Juan; este sitio es tal que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares al lado $\overline{BC}$, el lado AB mide 120 m y si se prolongan los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, estos se cortan en un punto E, tal que E está a 120 m de $\overline{DC}$ y a 160 m de $\overline{AB}$. Según estos datos, ¿cuántos metros de cerca se requieren para cerrar el sitio de Juan?

A) 300 m
B) 600 m
C) 900 m
D) 4.200 m



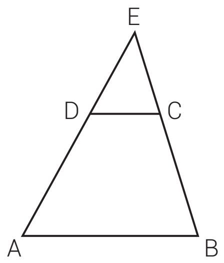
29. En la figura, el triángulo ABC es equilátero cuyo lado mide 12 cm, M y N son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si F es punto de la recta AB, NF y BC son rectas que se interceptan en P y CP es a PB como 2 es a 1, entonces $\overline{BF}$ mide



A) 4 cm
B) 8 cm
C) 12 cm
D) 18 cm

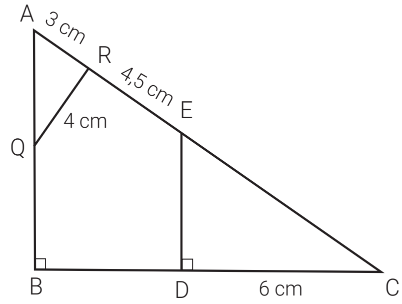
30. En la figura, $\overline{CD}$ es paralelo a $\overline{AB}$, con D y E puntos de $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ respectivamente.
Si DC : AB = 2 : 3 y el área del ΔDCE es 40 cm^2, ¿cuál es el área del trapecio ABCD?

A) 10 cm^2
B) 20 cm^2
C) 50 cm^2
D) 60 cm^2



31. En la figura, R y E pertenecen a $\overline{AC}$, Q y D pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $\overline{QR} \perp \overline{AC}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) BD = DC
B) QB = QR
C) DE = 8 cm
D) CE = 7,5 cm



13

32. Desde un dron Felipe ha fotografiado una cancha de fútbol, el área del círculo central que es de 261 m^2 en la fotografía corresponde a un círculo de área 29 cm^2, entonces si el ancho de la cancha de fútbol es de 90 metros, en la fotografía será de

A) 1 cm
B) 3 cm
C) 10 cm
D) 30 cm

33. Dos cuadriláteros son semejantes, la razón entre los lados homólogos es 2 : 5 y el área del cuadrilátero mayor es A cm^2, entonces el área del cuadrilátero menor en cm^2 es

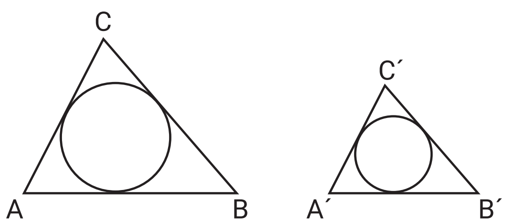
A) $\frac{2}{5}A$

B) $\frac{4}{5}A$

C) $\frac{4}{25}A$

D) $\frac{25}{4}A$

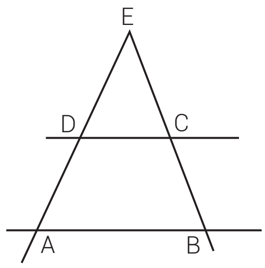
34. En la figura, los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, con A' el homólogo de A y B' el homólogo de B, con AB > A'B'. Si las circunferencias de la figura corresponden a las circunferencias inscritas a estos triángulos y sus áreas están en la razón 9 : 25, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) En el orden apropiado, la razón de semejanza entre los triángulos es 3 : 5.
B) En el orden apropiado, los perímetros de los triángulos están en la razón 5 : 3.
C) En el orden apropiado , las áreas de los triángulos están en la razón 3 : 5.
D) En el orden apropiado, las longitudes de la circunferencias están en la razón 5 : 3.

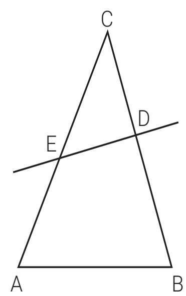
13

35. En la figura, las rectas AB y CD son paralelas y AD y BC se intersectan en el punto E.
Si AB = 9 cm, DC = 6 cm, CE = 4 cm y AE = 7,5 cm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El perímetro del trapecio ABCD es 19,5 cm.
B) El perímetro del triángulo DCE es 15 cm.
C) La razón entre las áreas de los triángulos DCE y ABE es 2 : 3.
D) Las alturas de los triángulos DCE y ABE correspondientes a los lados $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ están en la razón 2 : 3.

36. En la figura, D y E pertenecen a los lados del triángulo ABC, $\measuredangle CDE \cong \measuredangle CAB$, AB = 15 cm y DE = 10 cm. Si el área del cuadrilátero ABDE es 15 cm^2, entonces el área del triángulo CDE en cm^2 es



A) 7,5 cm^2
B) 10 cm^2
C) 12 cm^2
D) 15 cm^2

37. Para poder efectuar la remodelación de un departamento, el arquitecto traza un plano con una escala de 1 : 200. Si las medidas del largo y el ancho del departamento son 12 metros y 8 metros respectivamente, entonces ¿cuáles son respectivamente las medidas del largo y el ancho del departamento en el plano?

A) 0,06 cm y 0,04 cm
B) 0,6 cm y 0,4 cm
C) 6 cm y 4 cm
D) 60 cm y 4 cm

38. Un sitio rectangular está representado en un plano por un rectángulo de lados 10 y 30 cm.
Si la escala del plano es 1 : 100, entonces el área del sitio en m^2 es

A) 30 m^2
B) 300 m^2
C) 3000 m^2
D) 30000 m^2

39. Un terreno de forma rectangular de área 10.000 m^2 está representado en un mapa por un rectángulo de cuyos lados miden 20 cm y 5 cm, ¿cuál es la escala del mapa?

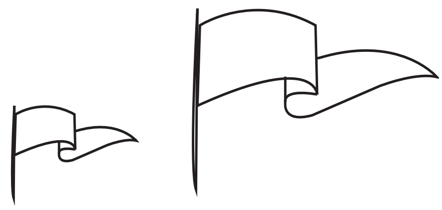
A) 1 : 10
B) 1 : 100
C) 1 : 1000
D) 1 : 10000

40. Un fundo tiene un terreno de 16 hectáreas (1 hectárea = 10.000 m^2) y está representado en un mapa por una figura de área 100 cm^2, ¿cuál es la escala del mapa?

A) 1 : 400
B) 1 : 4000
C) 1 : 20
D) 1 : 160000

41. Una compañía de scout tiene un banderín y desea ampliarlo, para utilizarlo en una reunión con todas las patrullas de la ciudad. Si la tela que se va a utilizar para el banderín ampliado es 400 veces la tela que se utilizó en el banderín original. Si uno de los lados del banderín original medía a cm, ¿cuántos cm medirá el lado correspondiente en el banderín ampliado?

A) 20 a
B) 40 a
C) 400 a
D) 1.600 a

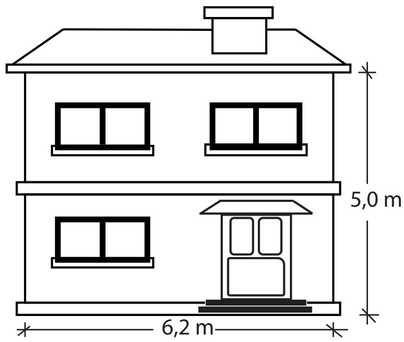


42. En la figura se muestra un vehículo y su correspondiente maqueta, se sabe que el área del vidrio del acompañante tiene un área de 1.200 cm^2, mientras que en el de la maqueta es de 12 cm^2, entonces si el largo del vehículo es 3 m, en la maqueta será de

A) 0,3 mm
B) 3 mm
C) 3 cm
D) 30 cm

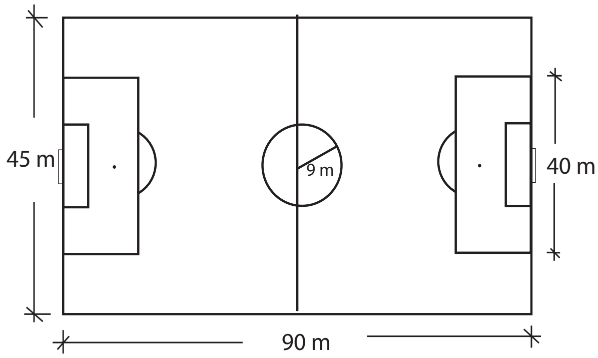
Editorial CID

43. En la figura, se muestran las dimensiones de la fachada de una casa, si un arquitecto dibuja esta fachada en un plano a una escala de 1 : 20, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) En el plano, el alto de la fachada será de 25 cm.
B) Si una de las ventanas tiene un largo de 1,8 m en el plano tendrá un largo de 9 cm.
C) Si el área de la puerta de entrada es 3,6 m^2, en el plano tendrá un área de 90 cm^2.
D) El perímetro de la fachada en el plano será de 11,2 cm.

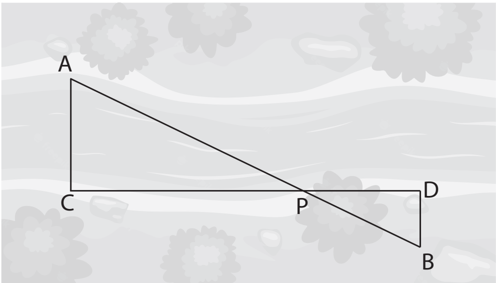
44. En la figura, se muestran las medidas de una cancha de fútbol en metros. Un dron fotografía esta cancha a una escala de 1 : 1500, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) En la fotografía, el largo de la cancha es de 6 cm.
B) En la fotografía, el área del círculo central es $0{,}36\pi$ cm^2.
C) En la fotografía, el largo del área es inferior a 2,6 cm.
D) En la fotografía, el área de la cancha es 18 cm^2.

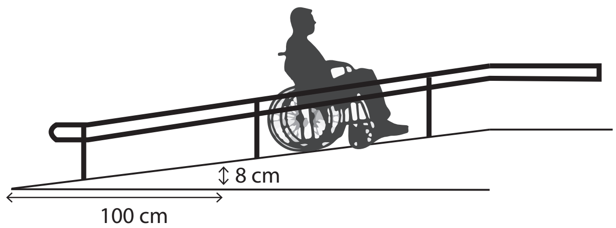
45. Pedro (P) desea saber el ancho de un río, para ello le pide a sus amigos Alberto (A) y Bernardo (B) que se ubiquen a la orilla del río, de tal forma que queden alineados con él, tal como se muestra en la figura. Enseguida coloca a la orilla del rio, dos piedras en los puntos C y D al frente de las posiciones de Alberto y Bernardo respectivamente. Si Bernardo se encuentra a 3 m de la orilla del río, y Pedro se ubica a 40 m de C y a 12 m de D y, ¿cuál es el ancho del río?

A) 8 m
B) 10 m
C) 12 m
D) 20 m



13

46. En Chile las rampas para minusválidos tienen una pendiente máxima de un 8%, esto significa que al avanzar 100 cm horizontalmente la rampa llega a una altura de 8 cm, tal como se muestra en la figura:

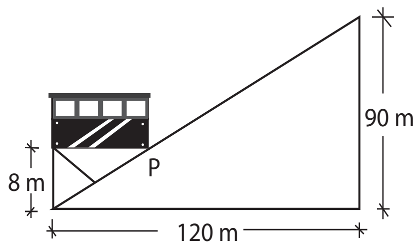


En el instante en que una persona asciende por la rampa hasta que la parte inferior de su rueda llega a una altura de 20 cm, ¿cuánto habrá avanzado horizontalmente?

A) 120 cm
B) 125 cm
C) 180 cm
D) 250 cm

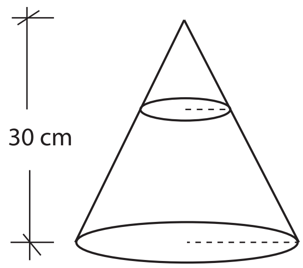
47. En los cerros de Valparaiso existe un ascensor, cuyas dimensiones se muestran en la figura. Si P es el punto donde una de sus ruedas se apoya sobre el riel, ¿a qué distancia del piso estará este punto P cuando el funicular haya recorrido 25 m?

A) 15 m
B) 23 m
C) 28 m
D) 30 m



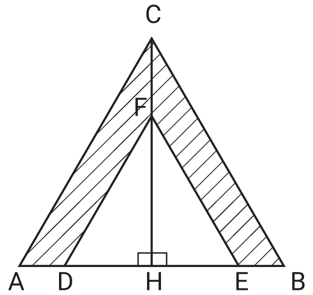
48. El gorro de cumpleaños de la figura, se ha cortado paralelamente a la base de modo que el radio del círculo inferior es el triple del radio del círculo superior.
Si el área del círculo inferior es 81π cm^2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El volumen del cono superior es 30π cm^3.
B) El radio del círculo superior mide 3 cm.
C) El área del círculo superior es 27π cm^2.
D) La altura del tronco de cono es 20 cm.



13

49. En la figura, se muestra una flecha representada por la zona sombreada, donde ABC y DEF son triángulos equiláteros y D y E pertenecen al lado $\overline{AB}$. Si AD = 3 cm, DF = 12 cm y C, F y H son colineales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



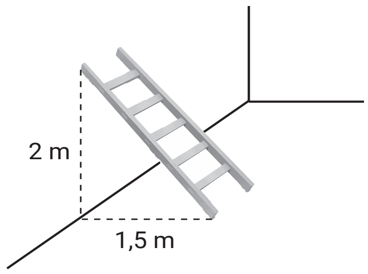
A) En el orden adecuado la razón de semejanza de los triángulos ABC y DEF es 2 : 3.

B) El área de la zona sombreada es $45\sqrt{3}$ cm^2.

C) CF = 3 cm.

D) El área del triángulo DEF equivale a más del 44% del área del triángulo ABC.

50. Una escalera se apoya en un muro vertical como se muestra en la figura. Si un maestro pintor sube por esta escalera, hasta que sus pies se encuentren a 80 cm de altura, entonces ¿qué distancia habrá recorrido por la escalera?



A) 1,0 m

B) 1,2 m

C) 1,5 m

D) 2,0 m

51. Ingrid es diseñadora de vestuario y está diseñando un nuevo vestido para la nueva temporada, para ello realiza una maqueta de él. La parte delantera del vestido de la maqueta tiene una pechera la cual ocupa 1.600 cm^2 de tela, mientras que en el vestido esta pechera ocuparía 1 m^2. Si el alto del vestido es 1,6 metros, entonces esta altura en la maqueta será de

A) 4 cm

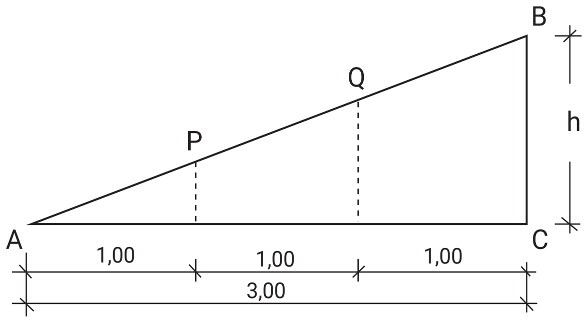
B) 6,4 cm

C) 32 cm

D) 64 cm

13

52. La pendiente de un techo se calcula en términos porcentuales, si decimos que un techo tiene una pendiente de un un a% significa que por cada 100 cm que se avanza horizontalmente, la altura se eleva en a cm.
En la figura, la pendiente del techo que se muestra es de un 40%, si las medidas están en metros ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



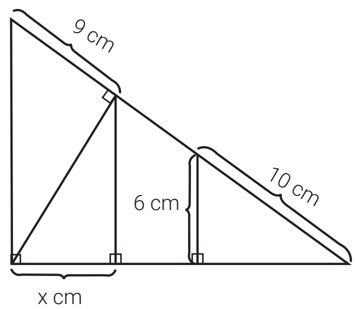
A) P está a 40 cm de altura con respecto a la horizontal $\overline{AC}$.

B) La altura "h" del techo es 1,2 m.

C) Cada 1 metro que se avanza horizontalmente la altura aumenta 40 cm.

D) La diferencia entre las alturas entre P y Q con respecto a $\overline{AC}$ es 0,8 m.

53. Según los datos en la figura, x mide



A) 6 cm
B) 7,2 cm
C) 9,6 cm
D) 11,25 cm

54. Si el área de un paralelogramo que forman los vectores es u y v es p unidades cuadradas, con p > 0, entonces el área del paralelogramo formado por los vectores -3u y 3v medida en unidades cuadradas es

A) 3p

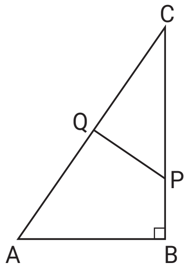
B) 5p

C) 9p

D) Faltan datos para determinarlo.

13

55. En la figura, P y Q pertenecen a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tal que $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$, PQ = 6 cm, PB = 2 cm y QC = 8 cm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



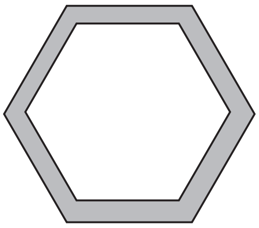
A) AB – AQ = 2 cm

B) El perímetro de ABPQ es 24 cm.

C) El área de ABPQ es 30 cm^2.

D) El área de APC es 90 cm^2.

56. En la figura se muestra una cerámica de baño, cuya forma es de un hexágono regular. Interiormente tiene dibujado otro hexágono regular, de lados paralelos al anterior, de modo que la razón de semejanza de ambos hexágonos es 4 : 5 y el perímetro de la zona sombreada es 216 cm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El lado del hexágono blanco mide 16 cm.

B) La cerámica cubre una superficie de $600\sqrt{3}$ cm^2.

C) Si se quiere embalar esta cerámica en cajas de forma de prisma recto de base rectangular cuyas dimensiones son las menores posibles, entonces una de las longitudes de la base es $20\sqrt{3}$ cm.

D) El área sombreada equivale a $\frac{1}{5}$ del área de la cerámica.

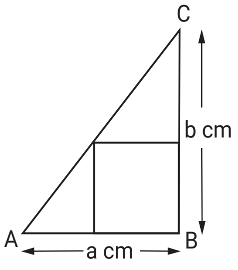
57. En la figura, se ha trazado un cuadrado donde uno de los vértices es el punto B y los otros tres pertenecen a los lados del triángulo ABC, ¿cuánto mide el lado del cuadrado?

A) $\frac{a + b}{ab}$

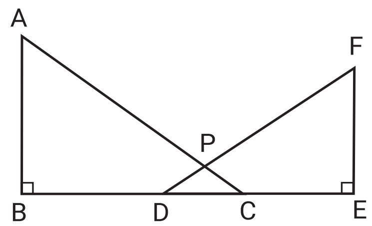
B) $\frac{ab}{a + b}$

C) $\frac{a^2}{a + b}$

D) $\frac{b^2}{a + b}$



58. En la figura, D y C pertenecen a $\overline{BE}$ y $\overline{AC} \perp \overline{DF}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



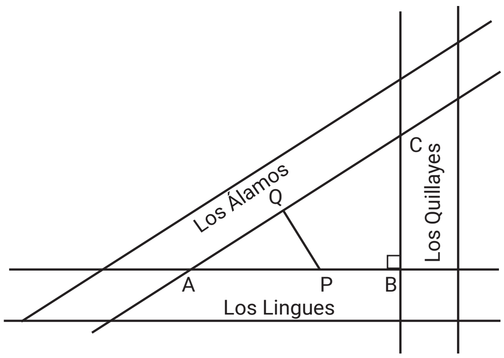
A) $\dfrac{AB}{DP} = \dfrac{AC}{DC}$

B) $\dfrac{DE}{DP} = \dfrac{EF}{PC}$

C) $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{FE}$

D) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$

59. Se tiene el sitio triangular ABC que delimita con las calles que se muestran en la figura:



AB y BC miden 16 m y 12 m respectivamente, P es un punto que está en $\overline{AB}$ a una distancia de 6 m de B. Si Q es un punto en $\overline{AC}$ tal que $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Yendo por el interior del sitio la distancia de P a los Álamos es igual a la distancia de P a los Quillayes, yendo por los Lingues.

B) La distancia desde Q a los Lingues yendo por los Álamos es 8 m.

C) Si se camina desde P a Q por las calles Los Lingues doblando por Los Álamos se camina el triple que yendo directamente por el interior del sitio.

D) C está a mayor distancia de Q que a Los Lingues.

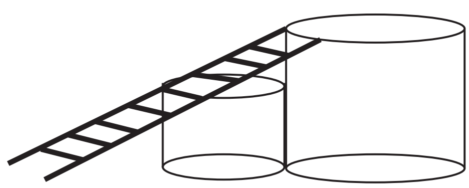
60. En la figura, se muestran dos estanques cilindricos, cuyas alturas miden lo mismo que su diámetro. Una escalera se apoya sobre los bordes de los dos estanques, los cuales se apoyan mutuamente y sus diámetros miden 3 y 2 metros, ¿a qué distancia se encuentra el pie de la escalera del estanque más cercano?

A) 0,5 m

B) 1 m

C) 2 m

D) 4 m



13

Capítulo 14

CUERPOS GEOMÉTRICOS

Eudoxo nació aproximadamente en el 408 a. C, en un lugar llamado Cnidos, el que actualmente pertene a Turquía. Eudoxo como uno de los padres del Cálculo Infinitesimal, con su método llamado método de exhausión.

Con este método inscribió polígonos regulares en una circunferencia de radio uno, para polígonos de 6, 8, 10, 12, 14 y hasta 200 lados obtuvo áreas de 2,598, 2,828, 2,939, 3, 3,037 y 3,141, de esta forma fue obteniendo un valor muy cercano a π.

Con este método también demostró que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cono cuando los radios basales y las alturas son iguales.

Eudoxo con su método exhaustivo influyó en matemáticos posteriores como Arquímedes de Siracusa, el cual amplió este método logrando calcular áreas de figuras curvilineas.

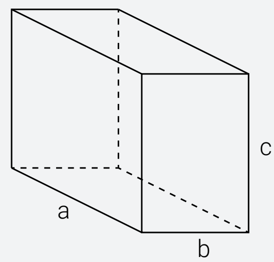
CONCEPTOS CLAVES

- **Área de un prisma recto**
- **Volumen de un prisma recto**
- **Área de un cilindro**
- **Volumen de un cilindro**
- **Área un cono**
- **Volumen de un cono**

ÁREA Y VOLUMEN DE UN PRISMA

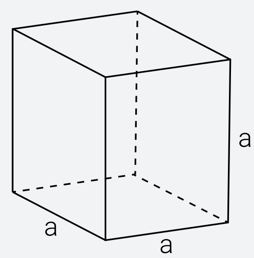
En un prisma recto de base rectangular, también llamado ortoedro, calculamos su área y volumen de la siguiente forma:

Área lateral:	2ac+2bc
Área basal:	2ab
Área total:	2(ab+bc+ac)
Volumen:	abc



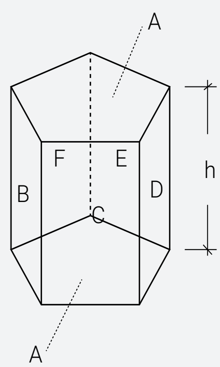
En el caso que el ortoedro fuera un cubo de arista a, tendríamos:

Área lateral:	$4a^2$
Área basal:	$2a^2$
Área total:	$6a^2$
Volumen:	a^3



En el caso de ser la base un polígono cualquiera (por ejemplo en la figura se tiene un pentágono de área A) entonces:

Área lateral:	B+C+D+E+F
Área basal:	2A
Área total:	2A+B+C+D+E+F
Volumen:	Ah



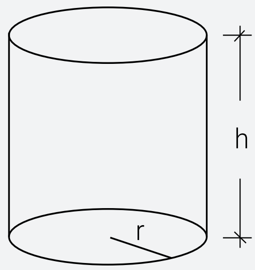
En la figura: A es el área del polígono basal y B, C, D, E y F son las áreas de los rectángulos que forman sus caras laterales y h es la altura del prisma.

14

ÁREA Y VOLUMEN DE UN CILINDRO

En un cilindro recto, de altura h y radio basal r, tenemos que:

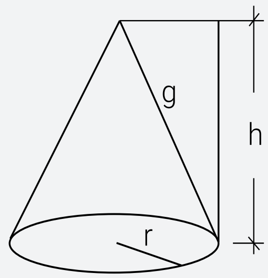
Área lateral:	$2\pi rh$
Área basal:	$2\pi r^2$
Área total:	$2\pi r(r + h)$
Volumen:	$\pi r^2 h$



ÁREA Y VOLUMEN DE UN CONO

En un cono recto, de altura h, generatriz g y radio basal r, tenemos que:

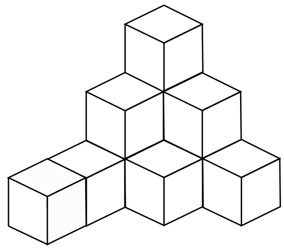
Área lateral:	πrg
Área basal:	πr^2
Área total:	$\pi r(r + g)$
Volumen:	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$



EJERCICIOS RESUELTOS

1. El cuerpo de la figura está formado por cubitos, donde el área de cada uno es 96 cm^2, ¿cuál es el volumen de este cuerpo, medido en cm^3?

A) 576
B) 640
C) 704
D) 768



Solución:
El área de un cubo de arista a es $6a^2$, por lo tanto $6a^2 = 96 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = 4$, entonces el volumen de cada cubo es $a^3 = 64$ cm^3, por otro lado el cuerpo de la figura está formado por 11 cubitos, luego su volumen es $11 \cdot 64 = 704$ cm^3, alternativa C).

2. En la figura se muestran dos envases cilíndricos de conservas, si el radio de la circunferencia basal del envase 2 mide el doble del correspondiente del envase 1 y la altura del envase 2 es la mitad de la altura del otro envase. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La capacidad del envase 2 es el doble del envase 1.

B) Los dos envases tienen misma área lateral.

C) El área del envase 2 es el doble del envase 1.

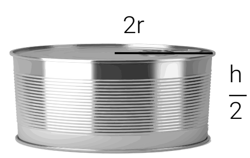
D) El área de la tapa del envase 2 es el cuádruple de la correspondiente del envase 1.


Envase 1


Envase 2

Solución:
Según la información dada, tenemos lo siguiente:

Envase 1



Envase 2

Para analizar la alternativa A, calcularemos el volumen de cada envase:

Envase 1: Volumen = $\pi r^2 h$

Envase 2: Volumen = $\pi(2r)^2 \cdot \frac{h}{2} = \pi \cdot 4r^2 \cdot \frac{h}{2} = 2\pi r^2 h$

Como el volumen del envase 2 es el doble del envase 1, tenemos que la capacidad del envase 2 es el doble de la del envase 1, luego A) es verdadera.

El área lateral del envase 1 es $2\pi rh$ y la del envase 2 es $2\pi \cdot 2r \cdot \frac{h}{2} = 2\pi rh$, luego tienen la misma área lateral, B) es verdadera.

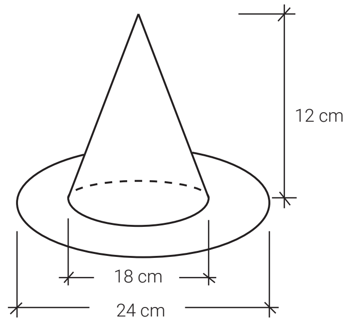
El área del envase 1 es $2\pi r^2 + 2\pi rh$, mientras que el área del envase 2 es: $2\pi \cdot (2r)^2 + 2\pi\, 2r \cdot \frac{h}{2} = 8\pi r^2 + 2\pi rh$, y no se concluye que el área del envase 2 es el doble del área del envase 1, luego C) es falsa.

En la alternativa D) tenemos que el área de la tapa del envase 1 es πr^2 y el área de la tapa del envase 2 es $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$, luego D) es verdadera.

14

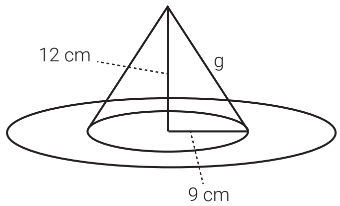
3. Se tiene un gorro de cumpleaños cuyas dimensiones se muestran en la figura, ¿cuántos cm^2 de cartulina se requieren para su fabricación?

A) $108\pi\ cm^2$
B) $198\pi\ cm^2$
C) $387\pi cm^2$
D) $1.359\pi\ cm^2$



Solución:

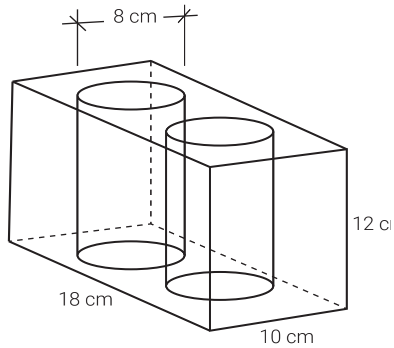
Para calcular el área lateral del cono, debemos determinar la genetratriz, para ello ocuparemos el triángulo rectángulo de catetos 9 cm y 12 cm que se muestra a continuación:



Utilizando el Teorema de Pitágoras, tenemos que: $g^2 = 9^2 + 12^2 \to g^2 = 225 \to g = 15$ cm
Luego al área lateral del cono es $\pi rg = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi\ cm^2$, a esta área debemos agregar el área que corresponde al ala del sombrero, la que se calcula restando el área de un círculo de radio 12 cm con el área de un círculo de radio 9 cm: $\pi \cdot 12^2 - \pi 9^2 = 63\pi\ cm^2$, luego la cantidad de cartulina que se requiere para construir este sombrero es $135\pi + 63\pi = 198\pi\ cm^2$, alternativa B).

4. En la figura se tiene un bloque de concreto donde se le han hecho dos perforaciones. Si la densidad del concreto es 2,4 g/cm^3, ¿cuál es la masa del bloque medida en kilogramos? (aproxima π a 3)

A) 1
B) 2,42
C) 3,63
D) 3,8

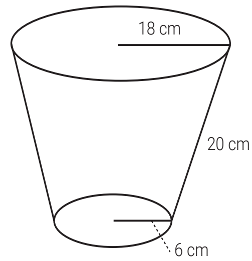


Solución:

Observa que el volumen de este bloque es el volumen del paralelepípedo recto de base rectangular menos el volumen de los dos cilindros:
Volumen del paralelepípedo: $12 \cdot 18 \cdot 10 = 2.160\ cm^3$, volumen de cada cilindro: $\pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 192\pi\ cm^3$.
Volumen del bloque: $2.160 - 2 \cdot 192\pi$, si aproximamos π a 3, obtenemos que el volumen del bloque es $1.008\ cm^3$, como la densidad es 2,4 g/cm^3, multiplicamos 1.008 por 2,4 lo cual nos da una masa para el bloque de 2.419 gramos o aproximadamente 2,42 kilos, alternativa B).

14

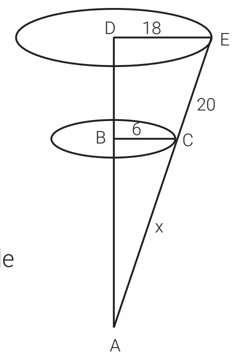
5. El balde la figura, tiene forma de tronco de cono, según las dimensiones dadas, ¿cuál es su capacidad? (aproxima π a 3)



A) 7,488 litros
B) 9,36 litros
C) 29,932 litros
D) 22,464 litros

Solución:

Ocupando la semejanza de los triángulos ABC y ADE de la figura (ver cap. 13) tenemos la siguiente proporción de trazos:



$\frac{x}{6} = \frac{x+20}{18}$,

multiplicando cruzado, obtenemos: $18x = 6x + 120 \rightarrow x = 10$.

Utilizando el Teorema de Pitágoras en ΔABC, tenemos que: $AB^2+6^2 = 10^2 \rightarrow AB = 8$ cm.

Si ahora utilizamos el Teorema de Pitágoras en ΔADE: $AD^2 + 18^2 = 30^2 \rightarrow AD = 24$ cm.

Para calcular el volumen del tronco de cono debemos restar el volumen del cono grande con el volumen del cono pequeño:

Volumen del cono grande: $\pi \cdot 18^2 \cdot 24 = 7.776\pi$ cm^3

Volumen del cono pequeño: $\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi$ cm^3

Luego el volumen del tronco de cono es $7.776\pi < - 288\pi = 7.488\pi$, si aproximamos π a 3, obtenemos 22.464 cm^3 o bien 22,464 litros (1L = 1000 cm^3), alternativa D).

ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:
- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

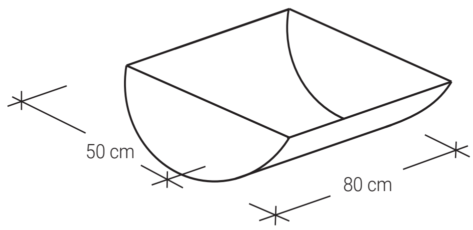
1. Una parrilla para asados, está hecha de la mitad de un tambor cilíndrico, tal como se muestra en la figura, ¿cuál es la cantidad máxima de carbón que puede contener, medida en cm^3?

A) 25.000π

B) 50.000π

C) 80.000π

D) 100.000π



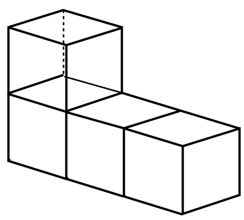
2. El cuerpo de la figura está formado por cubos de igual tamaño. Si el volumen del cuerpo es 500 cm^3, ¿cuál es su área?

A) 350 cm^2

B) 375 cm^2

C) 450 cm^2

D) 500 cm^2



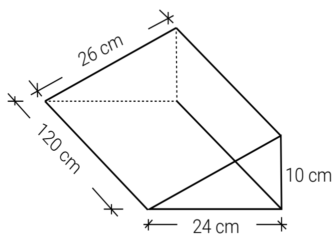
3. En la entrada de un edificio, se ha construido una rampa de concreto, para que suban las personas en silla de ruedas. Si la rampa tiene forma de prisma recto y tiene las medidas indicadas en la figura, ¿cuántos cm^3 de concreto se necesitan para construir esta rampa?

A) 3.120

B) 3.600

C) 14.400

D) 15.600



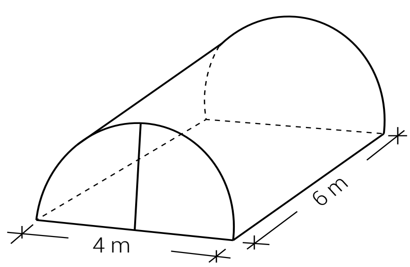
4. Una tienda de campaña tiene forma de semicilindro, tal como se muestra en la figura, ¿cuántos m^2 de tela se necesitan para construirla, considerando el piso y aproximando π a 3?

A) 36

B) 52

C) 60

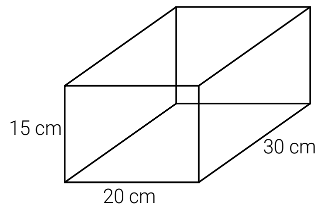
D) 72



14

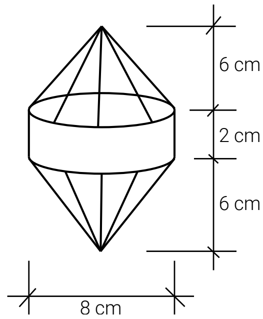
5. Una pecera sin tapa, cuyas dimensiones se muestran en la figura, se ha contruido con un vidrio de 6 mm de espesor cuyo valor es de $60.000 el m^2, ¿cuál sería el costo de construir esta pecera considerando solo el vidrio?

A) $9.300
B) $12.600
C) $16.200
D) $54.000



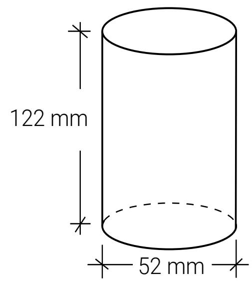
6. En la figura se muestra un trompo de madera, que está formado por un cilindro recto y dos conos rectos. Según los datos dados, ¿cuál es el volumen de este trompo?

A) 64π cm^3
B) 96π cm^3
C) 128π cm^3
D) 256π cm^3



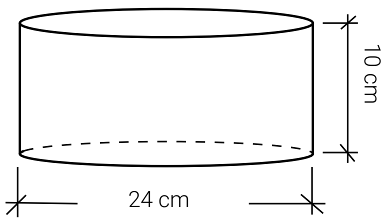
7. Una lata de bebida hecha de aluminio, tiene las dimensiones que se muestran en la figura, ¿cuántos cm^2 de aluminio se necesitan para fabricar esta lata?

A) $63{,}44\pi$
B) $70{,}20\pi$
C) $76{,}96\pi$
D) 90.48π



8. En la figura se muestra una torta de forma cilíndrica, la cual se ha decorado con una capa de crema de 1 cm de espesor, en sus costados y en su parte superior. Según los datos dados, ¿cuántos cm^3 de crema se necesitarán? (considera que $\pi = 3$)

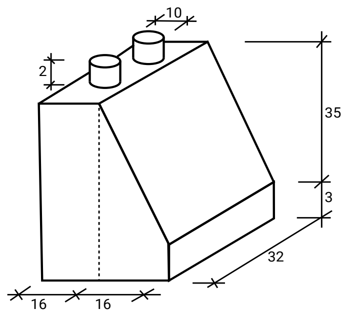
A) 419
B) 1.257
C) 1.764
D) 2.148



14

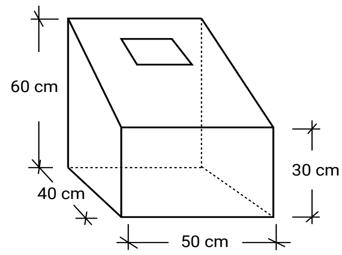
9. En la siguiente figura, se muestra una pieza de lego de gran tamaño que se utilizará como publicidad en una juguetería. Si las medidas que aparecen están en cm, ¿cuál es el volumen de esta pieza en cm^3? (aproxima π a 3)

A) 27.180
B) 29.184
C) 29.484
D) 30.252



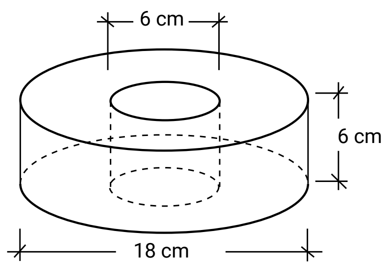
10. Se ha construido un monolito de concreto para poner una placa recordatoria. Si la densidad del concreto es 2,4 g/cm^3 y según los datos dados en la figura, ¿cuál es la masa de este monolito?

A) 21,6 kg
B) 216 kg
C) 288 kg
D) 432 kg



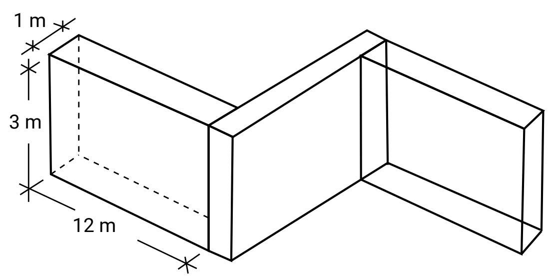
11. Un queque tiene forma de cilindro, donde en su parte central tiene un orificio cilíndrico. Según las dimensiones dadas en la figura y suponiendo que este queque es dividido en partes iguales entre 12 invitados, ¿cuántos cm^3 de queque recibirá cada uno?

A) 6π
B) 12π
C) 36π
D) 72π



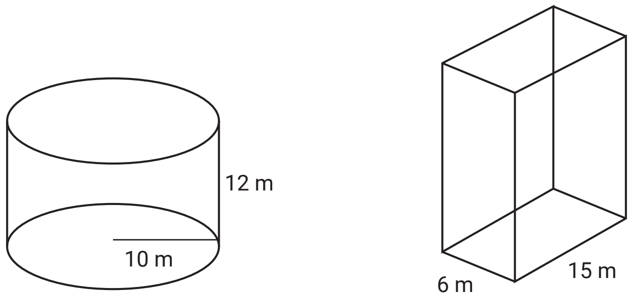
12. Un muro está formado por 3 paredes que tienen iguales dimensiones y se ubican tal como se muestra en la figura. Un maestro pinta este muro por todas las caras excepto la adosada al piso y cobra $2.000 por pintar cada m^2, entonces por pintar este muro cobra

A) $360.000
B) $516.000
C) $528.000
D) $534.000



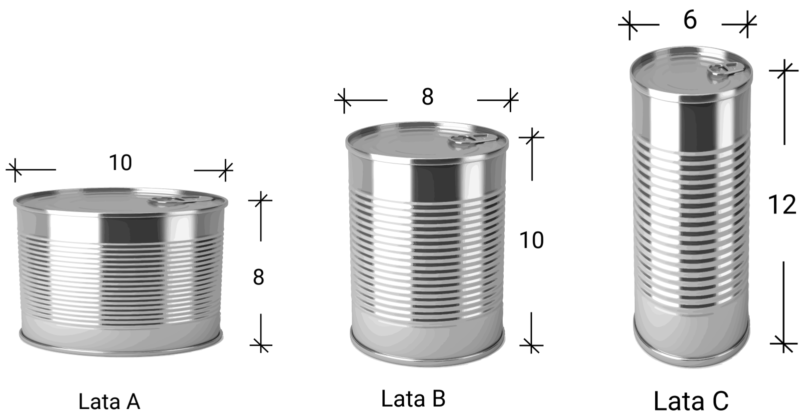
14

13. Se tienen dos estanques, una con forma cilíndrica y otro con forma de prisma recto de base rectangular, cuyas dimensiones se muestran en la figura. Si el estanque de la izquierda está lleno con agua y mediante una bomba se traspasa todo su liquido al de la derecha, entonces, si no hay pérdida en el trasvasije y aproximamos π a 3, entonces la altura que alcanzará el líquido en el segundo estanque es de



A) 20 m
B) 30 m
C) 40 m
D) 50 m

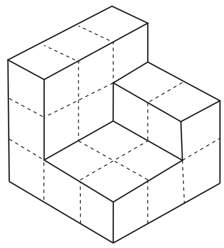
14. En la figura, se muestran 3 tipos de envases de conserva, hechas con aluminio. Si las medidas de las figuras están en cm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



A) La lata de mayor capacidad es la B.
B) La lata de menor capacidad es la A.
C) La lata que ocupa más aluminio es la C.
D) La lata que ocupa más aluminio es la A.

Editorial CID

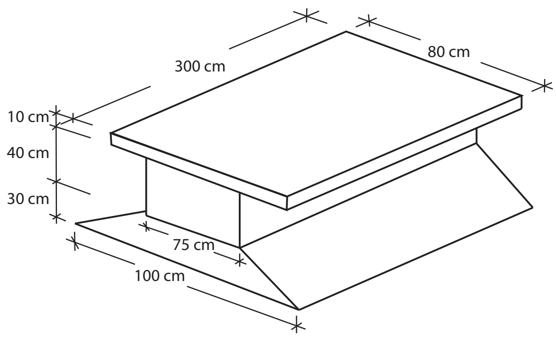
15. El siguiente cuerpo está formado por cubos cuyo volumen es de 216 cm^3 cada uno. Este cuerpo se encuentra apoyado sobre el piso y se va a cubrir con cerámicas cuadradas de 3 cm de longitud. Si cada caja contiene 30 cerámicas, entonces la cantidad de cajas que se requieren es



A) 5
B) 6
C) 7
D) 8

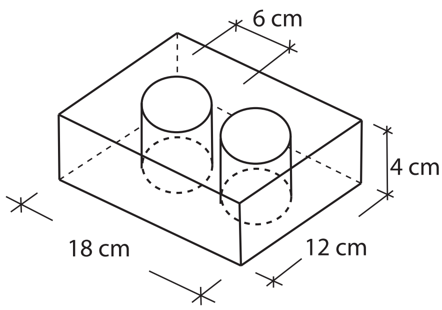
16. En la figura se muestra un altar de mármol. Según las medidas dadas, la cantidad de m^3 de marmol que se requieren para construir este altar es

A) Menor a 1.
B) Entre 1 y 2.
C) Entre 2 y 3.
D) Más de 3.



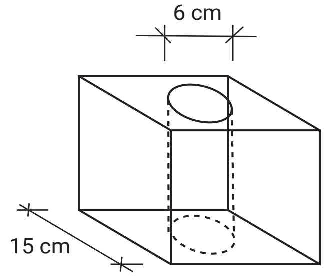
17. A un trozo de madera, de forma de papalelepípedo recto rectangular se le han hecho dos perforaciones cilíndricas, tal como se ilustra en la figura. Si posteriormente se le aplica pintura blanca, ¿cuántos cm^2 de pintura se necesitarán? (aproxima π a 3)

A) 528
B) 690
C) 708
D) 816

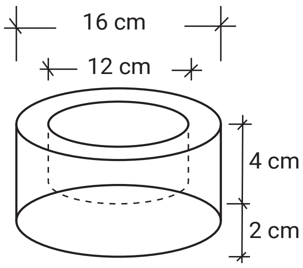


18. Para una obra en construcción, se ocuparán cubos de concreto, donde se ha hecho una perforación cilíndrica, para traspasar las cañerías de agua y electricidad. Si la densidad del concreto es 2,4 g/cm^3 y π lo aproximamos a 3, ¿cuál es la masa en kg de cada uno de estos bloques?

A) 4,212
B) 4,320
C) 7,128
D) 7,452

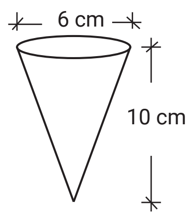


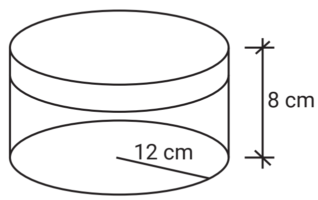
19. En la figura, se muestra un cenicero cilíndrico de madera, en el cual se ha hecho una perforación también cilíndrica. Si la densidad de esta madera es 0,6 g/cm^3 y π se aproxima a 3, ¿cuál es masa de este cenicero?



A) 432 g
B) 720 g
C) 1.200 g
D) 1.728 g

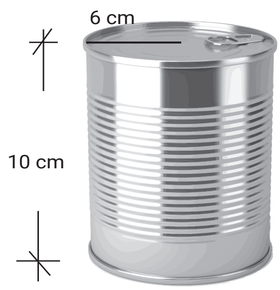
20. Los conos de helados de la figura derecha, van a hacer llenados con manjar, el cual viene en potes cilindricos, como el que se ilustra en la figura derecha. Si los potes de manjar están llenos y de acuerdo a la información dada, ¿cuántos potes de manjar hay que comprar como mínimo para rellenar 100 barquillos?

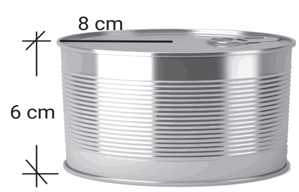




A) 3
B) 4
C) 5
D) Más de 5.

21. En la figura, se muestran dos tipos de envase de conserva, hechos de aluminio.
Si el valor del cm^2 de aluminio es \$2, y si aproximamos π a 3, ¿cuál es la diferencia entre los costos de aluminio en ambos envases?

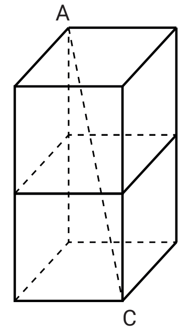




A) \$48
B) \$144
C) \$192
D) \$228

14

22. El cuerpo de la figura, consiste en dos cubos, pegados en una de sus caras, si la distancia entre A y C es $2\sqrt{6}$ cm, entonces el área del cuerpo es

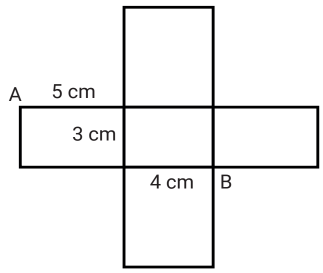


A) 40 cm^2
B) 48 cm^2
C) 240 cm^2
D) 288 cm^2

23. Utilizando los datos del ejercicio anterior, el volumen del cuerpo es

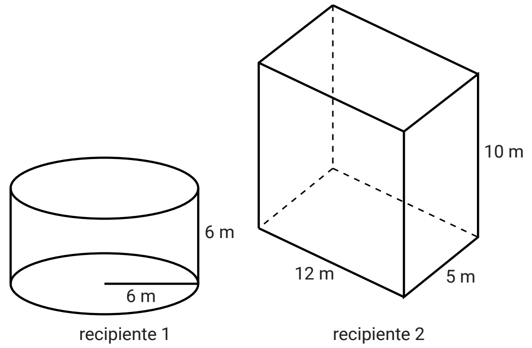
A) $48\sqrt{6}$ cm^3
B) $96\sqrt{6}$ cm^3
C) 48 cm^3
D) 16 cm^3

24. La red de la figura corresponde a la de un prisma recto de base rectangular, al armar este prisma, ¿a qué distancia quedarán los puntos A y B?



A) 5 cm
B) 12 cm
C) $3\sqrt{10}$ cm
D) $5\sqrt{2}$ cm

25. Se tienen dos recipientes de aluminio para juntar agua, según los datos de la figura y suponiendo que π es 3, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

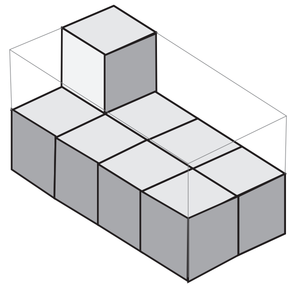


A) El recipiente 1 tiene una capacidad que supera al del recipiente 2 en 48 m^3.
B) Entre ambos podrían almacenar 1248 m^3 de agua.
C) Si estando lleno el recipiente 2, se vierte el agua en el recipiente 1, este llega a una altura superior a los 5,5 metros.
D) Si ambos recipientes no tienen tapa, es más económico es el recipiente 2.

14

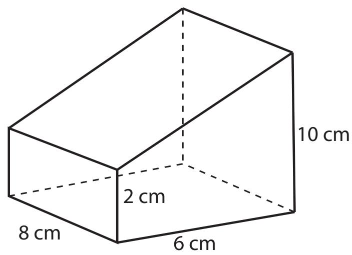
26. Fernando con algunos cubos ha formado un prisma recto de base rectangular y luego ha extraído algunos tal como se muestra en la figura. Si el volumen del cuerpo que se ha formado es 576 cm^3, entonces su área es

A) 416 cm^2
B) 448 cm^2
C) 480 cm^2
D) 512 cm^2



27. Se tiene una cuña hecha de madera cuya forma corresponde a un prisma recto cuya base es un trapecio rectángulo, y sus dimensiones se muestran en la siguiente figura. Si la densidad de la madera con la cual está hecho este prisma es 1,6 g/cm^3, entonces la masa de esta cuña es

A) 288 g
B) 460,8 g
C) 576 g
D) 921,6 g

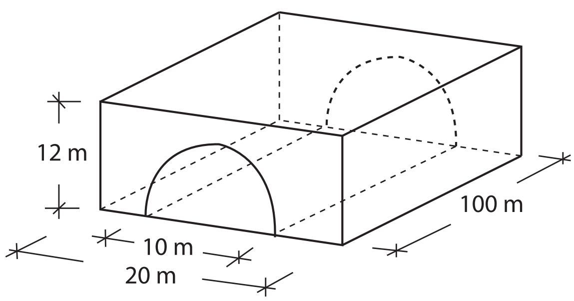


28. Si la cuña del ejercicio anterior se va a pintar con barniz, ¿cuántos cm^2 de superficie se deberán pintar?

A) 216
B) 224
C) 280
D) 296

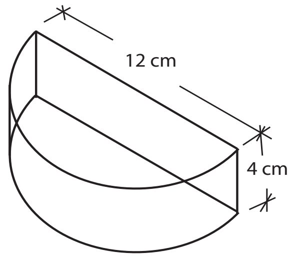
29. En la figura se muestra un tunel de ferrocarriles hecho de hormigón. Si el túnel tiene forma de paralelepípedo recto de base rectangular al cual se le ha extraido un semicilidro, ¿cuál es la cantidad de m^3 de homigón que se requieren para construirlo? (aproxima π a 3)

A) 9.000
B) 16.500
C) 19.000
D) 20.250



14

30. Un comedero de aluminio para hamster, tiene forma de semicilindro, cuyas dimensiones se muestran en la figura, ¿cuál es su capacidad medida en cm^3?



A) 72π

B) 108π

C) 144π

D) $12(4+5\pi)$

31. ¿Cuántos cm^2 de aluminio se necesitan para construir el comedero del ejercicio anterior?

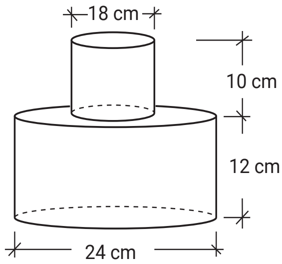
A) $60\ \pi$

B) $108\ \pi$

C) $6(8 + 7\pi)$

D) $48(1 + \pi)$

32. La figura muestra las medidas de una pieza de fierro fundido, si la densidad del fierro es aproximadamente 8 g/cm^3 y se aproxima π a 3, entonces aproximadamente la masa de esta pieza es



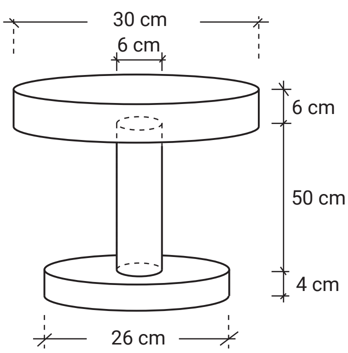
A) 7,6 kg

B) 30,5 kg

C) 60,9 kg

D) 243,6 kg

33. La mesa de centro de la figura está construida con madera de encina, si la densidad de esta madera es 0,8 g/cm^3 y suponiendo que π es 3, aproximadamente, ¿cuál es la masa de esta mesa medida en kilos?



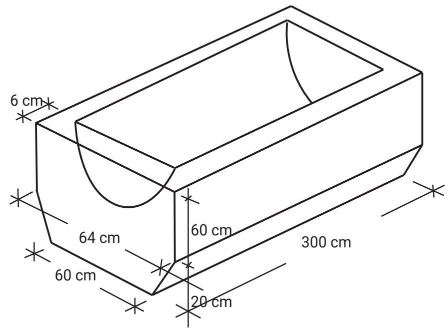
A) 1,981

B) 5,942

C) 7,428

D) 23,77

34. Una asadera de concreto tiene una forma de prisma recto cuya base es un trapecio. En la parte superior se ha extraido un semicilindro dejando una franja de 6 cm en todo el borde como se muestra en la figura. ¿Cuál de los siguientes cálculos es el correcto para determinar la cantidad de cm^3 de concreto que se requieren para construir esta asadera?



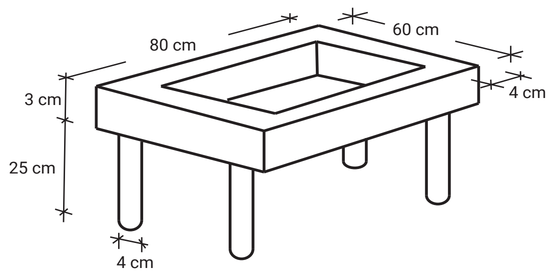
A) $64 \cdot 60 \cdot 300 + 62 \cdot 20 \cdot 300 - \frac{1}{2}\pi \cdot 52^2 \cdot 288$

B) $64 \cdot 60 \cdot 300 + 62 \cdot 20 \cdot 300 - \frac{1}{2}\pi \cdot 29^2 \cdot 288$

C) $64 \cdot 60 \cdot 300 + 62 \cdot 20 \cdot 300 - \frac{1}{2}\pi \cdot 26^2 \cdot 288$

D) $64 \cdot 60 \cdot 300 + 62 \cdot 20 \cdot 300 - \frac{1}{2}\pi \cdot 26^2 \cdot 294$

35. En la figura, se muestran las medidas de una mesa de centro hecha de madera, donde se ha hecho un corte interior para poner un vidrio. Si el corte se ha realizado de modo que quede un borde constante de 4 cm alrededor de la mesa y las patas tienen forma cilíndrica, ¿cuál de los siguientes cálculos se debe realizar para determinar cuántos cm^3 de madera se necesitan para construir esta mesa?



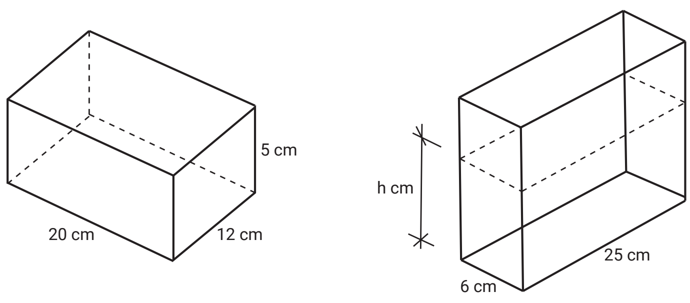
A) $60 \cdot 80 \cdot 3 - (60 - 8) \cdot (80 - 8) \cdot 3 + \pi \cdot 4^2 \cdot 25 \cdot 4$

B) $60 \cdot 80 \cdot 3 - (60 - 8) \cdot (80 - 8) \cdot 3 + \pi \cdot 2^2 \cdot 25 \cdot 4$

C) $60 \cdot 80 \cdot 3 - (60 - 4) \cdot (80 - 4) \cdot 3 + \pi \cdot 2^2 \cdot 25 \cdot 4$

D) $60 \cdot 80 \cdot 3 - (60 - 4) \cdot (80 - 4) \cdot 3 + \pi \cdot 4^2 \cdot 25 \cdot 4$

36. Se tienen dos peceras con forma de prisma recto de pase rectangular, cuyas medidas se muestran en la figura. Si la pecera del lado izquierdo se encuentra llena con agua y se vierte todo su contenido en la pecera del lado derecho, entonces la altura h medida en cm que alcanzará el líquido es:



A) 6

B) 7

C) 8

D) 10

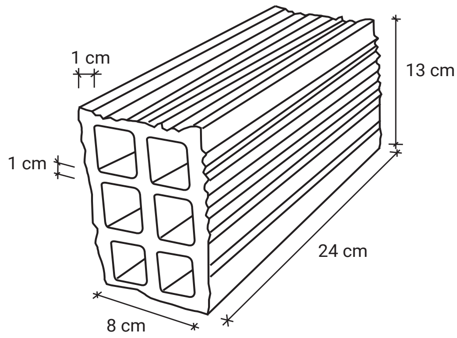
37. Un ladrillo hueco hecho de arcilla tiene las dimensiones que se muestran en la figura. ¿Cuál es la masa de este ladrillo medida en gramos, si su densidad es 0,8 g/cm^3?

A) 787,2

B) 1.132,8

C) 1.276,8

D) 1.416



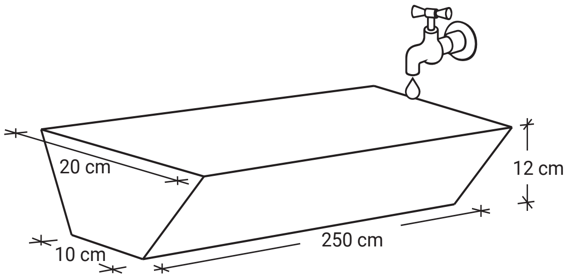
38. Un bebedero para aves de corral tiene forma de prisma recto cuya base es un trapecio. Si la llave que llena este bebedero entrega 50 cm^3 de agua por segundo, ¿cuántos minutos demora en llenarlo, suponiendo que este está vacío en el momento de abrir la llave?

A) 12

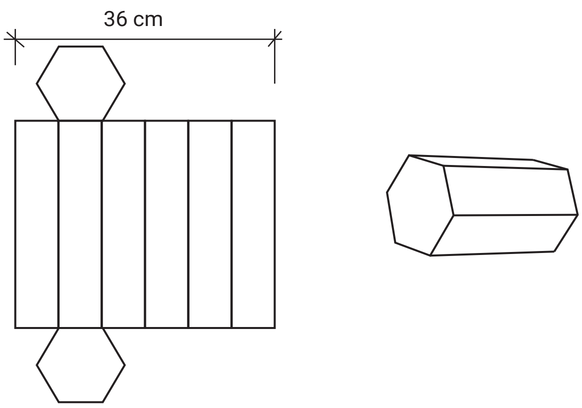
B) 15

C) 750

D) 900



39. La figura muestra la red de un prisma recto regular de base hexagonal. Si el área lateral de este prisma es 360 cm^2, ¿cuál es su volumen?



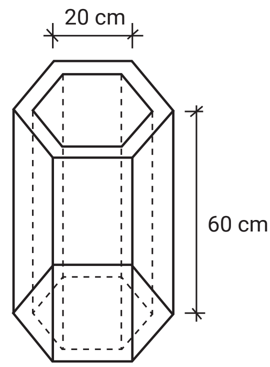
A) 120 cm^3

B) $45\sqrt{3}$ cm^3

C) $90\sqrt{3}$ cm^3

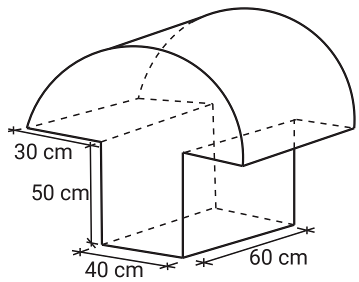
D) $540\sqrt{3}$ cm^3

40. La jardinera de concreto de la figura tiene forma de prisma recto regular cuya base es un hexágono y en su interior hay otro hexágono regular de lado 16 cm. Si se aproxima $\sqrt{3}$ a 1,7, ¿cuál es la capacidad de esta jardinera medida en litros?



A) Menos de 10 litros.
B) Entre 10 y 30 litros.
C) Entre 30 y 50 litros.
D) Más de 50 litros.

41. El cuerpo de la figura corresponde al logo de una institución, el cual será colocado en la fachada del edificio principal. Si este logo ha sido fabricado como un cuerpo macizo de aluminio y la densidad del alumninio es 2,7 g/cm^3, entonces la masa de este logo es (aproxima π a 3)

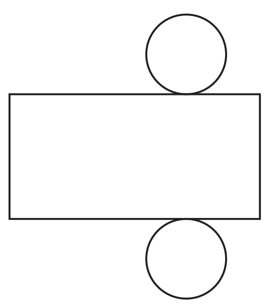


A) 345 kg
B) 931,5 kg
C) 2.146,5 kg
D) 2.754 kg

42. La empresa que construyó el logo del ejercicio anterior ha notado que la masa es excesivamente alta por lo que decidieron reducirla a la mitad, para llevar a cabo lo anterior, ¿cuál de las dimensiones de la figura se debería reducir a la mitad?

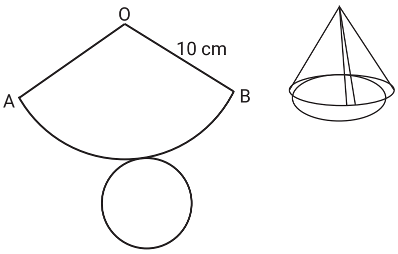
A) La de 30 cm.
B) La de 40 cm.
C) La de 60 cm.
D) Todas las indicadas en la figura.

43. En la figura se tiene el desarrollo plano de un cilindro. Si el área de cada una de las circunferencias es 25π cm^2 y el área del rectángulo es 80π cm^2, ¿cuál es el volumen del cilindro?



A) 80π cm^3
B) 100π cm^3
C) 200π cm^3
D) 400π cm^3

44. En la figura se muestra el desarrollo plano de un cono. Si el arco AB mide 12π cm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



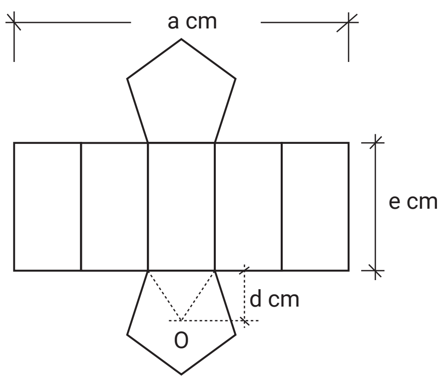
A) El radio de la circunferencia basal del cono mide 6 cm.

B) El área lateral del cono es 60π cm^2.

C) El volumen del cono es 96π cm^3.

D) La altura del cono mide 10 cm.

45. La figura corresponde a la red de un prisma regular, según los datos dados, ¿cuál su volumen medido en cm^3?



A) $\dfrac{ade}{5}$

B) $\dfrac{ade}{2}$

C) $\dfrac{5ade}{2}$

D) $\dfrac{a(d + 2e)}{2}$

46. Según los datos dados en el ejercicio anterior, ¿cuál es el área del prisma, medida en cm^2?

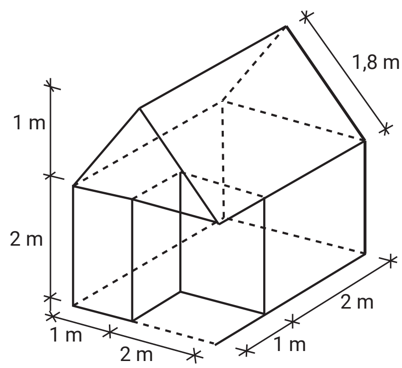
A) $\dfrac{ade}{5}$

B) $\dfrac{ade}{2}$

C) $a(e + d)$

D) $\dfrac{a(d + 2e)}{2}$

47. En la figura, se muestra un boceto de una bodega que se quiere construir para guardar herramientas. ¿Cuántos m^3 útiles tiene, considerando el techo?



A) 11,5

B) 13,5

C) 18,5

D) 20,5

48. Si un maestro pintor cobra $5.000 por pintar cada m^2, entonces por pintar las paredes exteriores de la bodega del ejercicio anterior cobra

A) $80.000
B) $90.000
C) $95.000
D) $120.000

49. Si un maestro pintor cobra $8.000 el m^2, por pintar un techo, entonces por pintar las 4 paredes del techo de la bodega del ejercicio 47, cobra

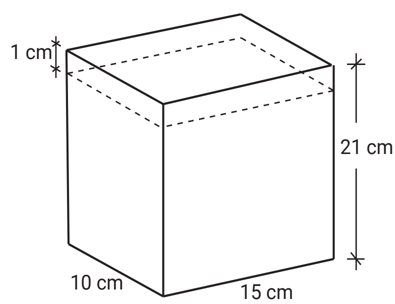
A) $67.200
B) $86.400
C) $110.400
D) $134.400

50. Un balde tiene forma de cilindro, cuya base tiene un radio de 10 cm, si en un instante que tiene una cierta cantidad de líquido se vierten en su interior 2,4 litros más, ¿en cuántos cm subirá el nivel del líquido? (aproxima π a 3)

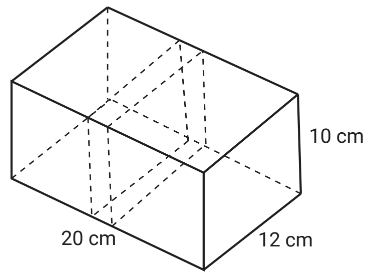
A) 3 cm
B) 5 cm
C) 8 cm
D) Más de 8 cm.

51. En la figura se muestra una caja de detergente, donde el contenido llega hasta una altura de un cm menos que la altura del envase. Se decide reemplazar este envase por uno que es un prisma recto rectangular, donde las dimensiones de la base son 12 y 20 cm, ¿qué altura debe tener este envase si también se debe dejar un cm de altura libre de detergente?

A) 11,5 cm
B) 12,5 cm
C) 13,5 cm
D) Falta información para determinarlo.

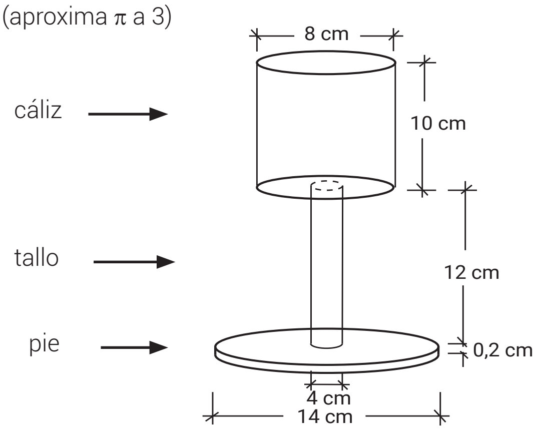


52. El queque de la figura, tiene forma de prisma recto de base rectangular. El pastelero que lo ha fabricado decide aplicarle crema pastelera en todo su exterior y cortarlo en 20 rodajas iguales. ¿Cuántos cm^2 más de crema pastelera tendrá el corte de la orilla con respecto a uno que no esté a la orilla?



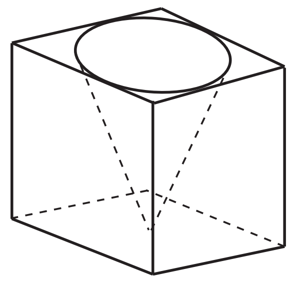
A) $20\ cm^2$
B) $120\ cm^2$
C) $140\ cm^2$
D) $240\ cm^2$

53. La copa de vidrio de la figura, tiene las característica de que al verter un líquido en ella, este ingresa en el tallo y después si alcanza el líquido, empieza a llenar el cáliz. Si se vierten $336\ cm^3$ en esta copa, ¿a qué altura de la base del pie de la copa llegará el líquido? (aproxima π a 3)



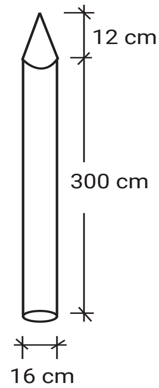
A) 7,2 cm
B) 15,8 cm
C) 16 cm
D) 16,2 cm

54. En la figura se muestra un cenicero que consiste en un cubo, que tiene un orificio cónico, donde la circunferencia basal del cono está inscrita en la cara superior del cubo y el vértice se encuentra en el centro de la cara inferior. Si la arista del cubo mide 6 cm, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



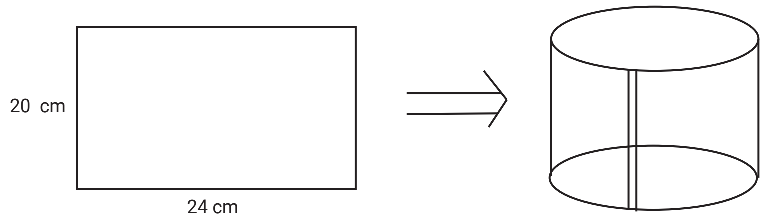
A) El cenicero tiene una capacidad de $18\pi\ cm^3$.
B) El volumen del cenicero es $18(12 - \pi)\ cm^3$.
C) El contenedor de la ceniza tiene un área de $9\pi\sqrt{5}\ cm^2$.
D) El volumen del cubo es el cuádruplo del volumen del cono.

55. Para cercar un sitio rectangular de 20 por 25 metros se han colocado postes de madera cada 5 metros. Si los postes tiene forma de cilindro con una punta cónica, tal como se muestra en la figura, ¿cuántos cm^3 de madera se ocuparán para cercar este sitio? (aproxima π a 3)



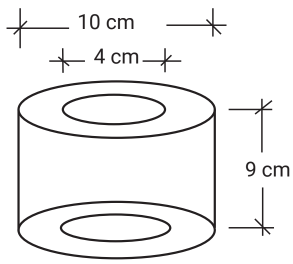
A) 817.152
B) 1.005.312
C) 1.050.624
D) 1.064.448

56. Una hoja de papel de 24 por 20 cm, se une por los dos bordes más cortos, tal como se muestra en la figura, si $\pi = 3$, ¿cuál es el volumen del cilindro que se forma?



A) 320 cm^3
B) 480 cm^3
C) 960 cm^3
D) 8.640 cm^3

57. En la figura se muestran las dimensiones de un papel higiénico. Si se colocan 8 de estos papeles higiénicos en una caja, sin dejar espacios en los costados, colocando 2 filas y 2 columnas en la parte inferior y la misma cantidad en el nivel superior. ¿Cuántos cm^3 de la caja no estarán ocupados, si π lo aproximamos a 3?

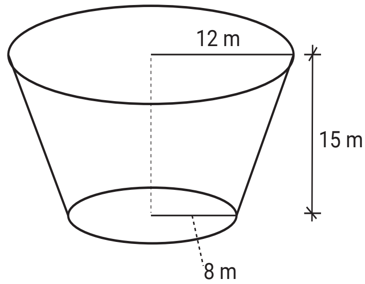


A) 936
B) 1.944
C) 2.664
D) 6.633

58. En un prisma recto de base rectangular, el largo aumenta un 25%, el ancho disminuye en las dos quintas partes y el alto disminuye en una novena parte, entonces su volumen

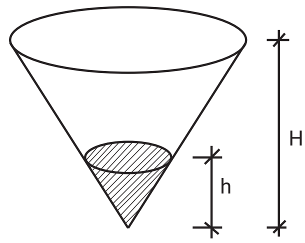
A) permanece invariable.
B) disminuye en su dos terceras partes.
C) disminuye en un tercio.
D) falta información para determinarlo.

59. Un estanque tiene forma de tronco de cono cuyas dimensiones se muestran en la figura. Estando el estanque lleno de agua se le conectan 10 bombas que extraen 200 litros por minuto cada una. Si las bombas trabajan simultáneamente, ¿cuánto tiempo demorarán en sacar todo el agua de este estanque? (aproxima π a 3)



A) Entre 12 y 24 horas.
B) Entre 24 y 36 horas.
C) Entre 36 y 48 horas.
D) Más de 48 horas.

60. Un estanque para acumular agua tiene forma de cono tal como se muestra en la figura. Si se echan 24 m^3 de agua en el estanque se cumple que $h = \frac{1}{5}H$, donde h es la altura del agua y H es la altura del recipiente, ¿cuál es la capacidad de este estanque, medida en m^3?



A) 96
B) 120
C) 600
D) 3.000

Capítulo 15

ESTADÍSTICA

Con la llegada de los grandes computadores, ahora podemos procesar una enorme cantidad de datos, lo que ha contribuido al avance en áreas muy diversas como la medicina, el deporte, robótica, o la sociología, la que nos ayuda a estudiar el comportamiento y el consumo humano.

Existen dos tipos de estadística, la descriptiva y la inferencial. En este capítulo veremos la primera, la que se dedica a analizar los datos obtenidos, graficándolos y calculando diversos parámetros, como la media, los percentiles, la desviación estándar, etc.

Por otra parte, la estadística inferencial se preocupa de sacar conclusiones de una población a partir de una muestra de ella, lo cual es muy importante en cualquier estudio científico.

CONCEPTOS CLAVES

- **Organización de datos**
- **Rango**
- **Representación de datos**
- **Medidas de posición**
- **Medidas de tendencia central**

ORGANIZACIÓN DE DATOS

Si tenemos un conjunto de datos, existen diversas formas de organizarlos, acá veremos solo los más frecuentes.

- **Diagrama de tallo y hojas**

Este diagrama permite ordenar los datos de tal forma que los de mayor frecuencia se destaquen sobre los demás, esto también se produce en un gráfico de barras o un histograma como veremos más adelante.
En este diagrama se coloca en el tallo la o las cifras de mayor valor posicional y en las hojas las cifras restantes.
Por ejemplo, las siguientes notas: 3,2 ; 3,5 ; 4,1 ; 4,7 ; 4,9, 5,1 ; 5,5 ; 5,8 ; 5,9 ; 6,0 ; 6,5 ; 7,0 en un diagrama de tallo y hojas quedarían de la siguiente forma:

Tallo	Hojas
3	2 5
4	1 7 9
5	1 5 8 9
6	0 5
7	0

- **Tabla de frecuencias**

En las tablas de frecuencias, al lado del dato aparece la frecuencia del dato, es decir la cantidad de veces que se repite.

Ejemplo:

Dato	Frecuencia
12	3
15	4
18	7
21	6

También podemos disponer de una tabla de frecuencias acumuladas, donde aparece la cantidad de datos que son menores o iguales que él:

Dato	Frecuencia acumulada
12	3
15	7
18	14
21	20

Por ejemplo, que el dato 18 tenga una frecuencia acumulada de 14 indica que hay 14 datos que son menores o iguales que él.
También podemos tener una tabla de frecuencias relativas, esta indica que parte es la frecuencia del dato con respecto al total, esta se expresa en números decimales.

Siguiendo con el mismo ejemplo, tenemos que el dato 12 se repite 3 veces de un total de 20, es decir en términos de fracciones es $\frac{3}{20}$, o bien 3 : 20 = 0,15 en decimal.

Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa
12	3	0,15
15	4	0,2
18	7	0,35
21	6	0,3

Si la frecuencia relativa la expresamos en términos porcentuales, se denomina frecuencia relativa porcentual:

Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
12	3	0,15	15%
15	4	0,2	20%
18	7	0,35	35%
21	6	0,3	30%

También podemos tener tablas con frecuencias relativas acumuladas o frecuencias porcentuales acumuladas:

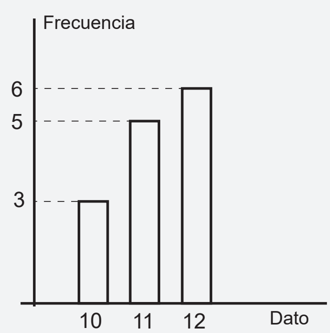
Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia relativa porcentual	Frecuencia acumulada porcentual
12	3	0,15	0,15	15%	15%
15	4	0,2	0,35	20%	35%
18	7	0,35	0,70	35%	70%
21	6	0,3	1,0	30%	100%

GRÁFICOS

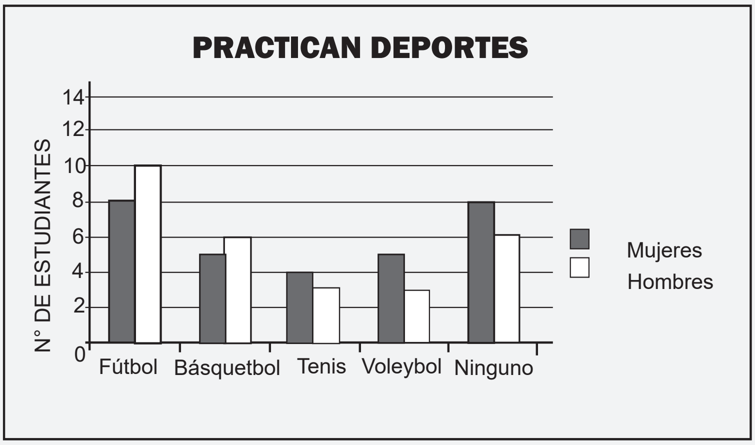
Existen diversos gráficos para representar datos, entre ellos los más importantes están el gráfico de barras y el histograma, en ambas las alturas de las columnas que se presentan están relacionadas con las frecuencias de los datos.

- **Gráfico de barras**

En el eje horizontal se colocan los datos y en el vertical las frecuencias de los datos, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

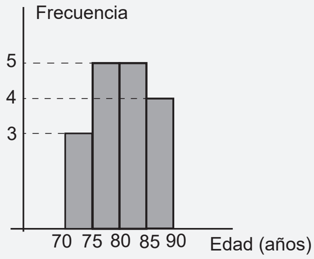


También existen los gráficos de barras dobles que nos permiten comparar dos variables:



- **Histograma**

Se utiliza frecuentemente cuando la variable es continua o discreta agrupada en intervalos, generalmente los intervalos son de la forma [a,b[y el último de la forma [a,b], a no ser que se indique lo contrario. El histograma está constituido por rectángulos contiguos donde su altura es proporcional a la frecuencia del intervalo:



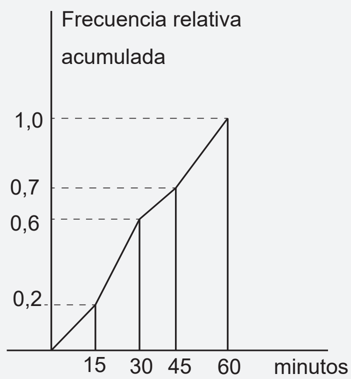
- **Ojiva (superior)**

La ojiva corresponde a un gráfico de frecuencias acumuladas, de frecuencias relativas o porcentuales acumuladas.

Este gráfico nos da información acerca de la cantidad de datos que son inferiores o superiores a un dato en particular.

Ejemplo de ojiva con frecuencia relativa acumulada

En este caso se observa que para el intervalo [30,45[, el gráfico aumenta de 0,6 a 0,7 es decir aumentó su frecuencia relativa en 0,1 en decir un 10%, por lo tanto un 10% de los datos está en este intervalo.
Por otro lado para el extremo derecho de este intervalo, es decir para el 45, presenta una frecuencia relativa acumulada de 0,7, esto significa que un 70% de los datos son inferiores a él.

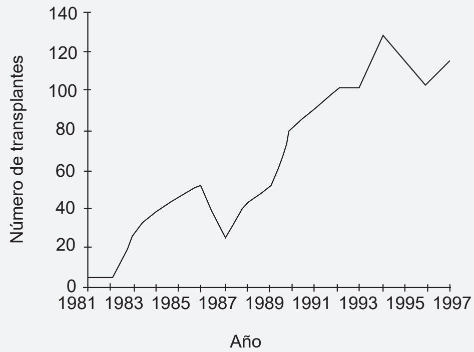


15

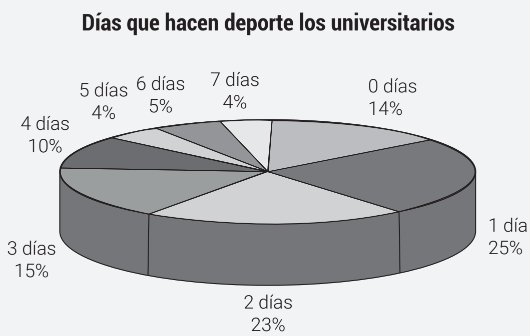
- **Otros gráficos**

También tenemos otros tipos de gráficos como los de línea, los circulares y los pictogramas.

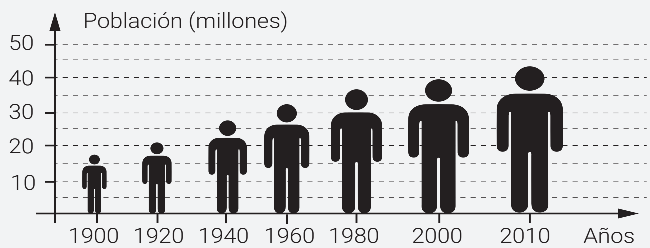
De línea:



Circulares:



Pictogramas:



15

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son la media, la mediana y la moda .

- **Media , media aritmética o promedio $\overline{x}$**

A) Si se tiene datos dados sin frecuencia, la media se calcula sumando los datos y dividiendo esta suma por el total de datos.

Datos: $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ $\rightarrow$ $\boxed{\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}}$

B) Si los datos vienen dados en una tabla de frecuencia, entonces la media se calcula multiplicando cada dato con su respectiva frecuencia, se suman estos productos y se divide por el total de datos.

Datos:

Dato	Frecuencia
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_n	f_n

$\rightarrow$ $\boxed{\overline{x} = \dfrac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}}$

C) Si los datos vienen dados en una tabla de frecuencia relativas, entonces la media se calcula multiplicando cada dato con su respectiva frecuencia relativa y se suman todos estos productos.

Datos:

Dato	Frecuencia relativa
x_1	r_1
x_2	r_2
...	...
x_n	r_n

$\rightarrow$ $\boxed{\overline{x} = x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \ldots + x_n \cdot r_n}$

Nota: si en la tabla se indicaran las frecuencias relativas porcentuales, se efectúa la misma operación anterior pero se dividiría por 100.

D) Si los datos están agrupados en intervalos, entonces la media se calcula multiplicando cada marca de clase del intervalo con la frecuencia correspondiente, se suman estos productos y se divide por el total de datos. La marca de clase corresponde a la media de los datos extremos del intervalo.

Datos:

Datos	Marca de clase	Frecuencia
$[x_1, x_2[$	$\overline{x_1}$	f_1
$[x_2, x_3[$	$\overline{x_2}$	f_2
...		...
$[x_n, x_{n+1}]$	$\overline{x_n}$	f_n

La media tiene las siguientes propiedades:

1) Si a todos los datos se le suma una constante (o se le resta), entonces la media aumenta (o se disminuye) esa constante.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rightarrow$ Media: $\overline{x}$

$x_1 + k, x_2 + k, x_3 + k, \ldots, x_n + k \rightarrow$ Media: $\overline{x} + k$

2) Si todos los datos se multiplican (o dividen) por una constante, entonces la nueva media se obtiene multiplicando (o dividiendo) la media anterior por dicha constante.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rightarrow$ Media: $\overline{x}$

$x_1 \cdot k, x_2 \cdot k, x_3 \cdot k, \ldots, x_n \cdot k \rightarrow$ Media: $\overline{x} \cdot k$

- **Mediana**

Si se ordenan los datos en sentido creciente o decreciente, la mediana es el dato que se ubica al centro (en el caso de ser uno) o es la media de los dos datos centrales.

Si el número de datos es n y n es impar, la mediana es el dato de lugar $\frac{n+1}{2}$.

En el caso que n fuera par, la mediana es la media entre los datos de lugares $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$.

- **Moda**

La moda es el dato que tiene mayor frecuencia.
Si todos los datos tienen la misma frecuencia diremos que no hay moda (muestra amodal).
Un conjunto de datos puede tener más de una moda.(muestra multimodal)

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión nos indican cuan dispersos están los datos, una de esas medidas es el rango.

- **Rango**

Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.
Este estadígrafo es cero en el caso en que todos los datos son iguales y es positivo en el resto de los casos.

MEDIDAS DE POSICIÓN O PERCENTILES

El percentil k o Pk, es un dato que es mayor o igual al k% de los datos.
Es decir, al hablar del percentil 60, es un dato que es mayor o igual al 60% de los datos.
Los cuartiles, son los percentiles 25, 50 y 75 y se designan como Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente, observa que Q_2 coincide con la mediana, con los cuartiles podemos construir el diagrama de caja o de cajón con bigotes como veremos más adelante.
Existen otros percentiles importantes, como los quintiles, que se ocupan bastante en Economía, como por ejemplo cuando hablamos de los quintiles de ingresos de un grupo familiar, los quintiles no son nada más que los percentiles: P_{20}, P_{40}, P_{60}, P_{80}.
Los deciles, son los percentiles, P_{10}, P_{20}, hasta el P_{90}.
Tenemos que distinguir si estamos calculando percentiles para datos discretos o percentiles para datos agrupados en intervalos, ya que su cálculo es diferente, como veremos en los siguientes ejemplos.

- **Percentil para datos discretos**

Nos referiremos a datos discretos a aquellos, que al ordenarlos de menor a mayor (o de mayor a menor) entre dos consecutivos, no existen datos entremedio, por ejemplo si las notas de Pablo en la asignatura de Física son: 4,6 ; 5,0 ; 5,2 ; 5,8 ; 6,0 ; 6,0 ; 6,8 y 7,0, entre dos notas consecutivas no hay otra entremedio (observa que han sido ordenadas en sentido creciente).
Para calcular percentiles para datos discretos, procederemos de la siguiente forma:
Supongamos que tenemos n datos y queremos calcular el percentil P_k:

1°) Se ordenan los datos en sentido creciente.

2°) Se calcula la expresión $\frac{kn}{100}$, si este valor te da decimal, el P_k es el dato de lugar siguiente al valor de esta expresión, si te da entero se calcula el promedio entre los datos de lugares $\frac{kn}{100}$ y $\frac{kn}{100} + 1$.

Ejemplo:
Consideremos las notas de Pablo: 4,6 ; 5,0 ; 5,2 ; 5,8 ; 6,0 ; 6,0 ; 6,8 y 7,0

Determinamos el percentil 20, calculamos: $\frac{20 \cdot 8}{100}$, lo que nos da 1,6, como nos dio decimal aproximamos a 2,

luego el percentil 20 corresponde al 2° dato, el cual es 5,0.

15

Si calculamos el tercer cuartil, esto corresponde al percentil 75, calculamos: $\frac{75 \cdot 8}{100}$, esto da 6, como es un entero, calculamos el promedio entre el 6° y el 7° dato, esto es $\frac{6 + 6,8}{2}$, por lo tanto el tercer cuartil es 6,4.

Observa que si calculamos el percentil 50 o la mediana, calculamos $\frac{50 \cdot 8}{100} = 4$, por lo que hay que calcular el promedio entre el 4° y el 5° dato: $\frac{5,8 + 6}{2} = 5,9$, lo que coincide con calcular la media entre los datos centrales tal como lo habíamos visto anteriormente.

Resumiendo:

Para datos discretos:	
1°) Se ordenan los datos en sentido creciente.	
2°) Se calcula: $\frac{kn}{100}$	
Si resulta decimal:	El percentil es el dato de lugar siguiente a $\frac{kn}{100}$.
Si resulta entero:	El percentil se calcula con el promedio de los datos de lugares: $\frac{kn}{100}$ y $\frac{kn}{100} + 1$.

- **Percentil para datos agrupados en intervalos**

Si tenemos n datos agrupados en intervalos, calcularemos la misma expresión anterior: $\frac{kn}{100}$, solo que ahora cambiaremos el criterio de cálculo del percentil:

Si $\frac{kn}{100}$ te da un entero, se busca el dato de lugar $\frac{kn}{100}$, si te da decimal, se calcula el promedio entre los datos más cercanos a este valor. Es importante considerar que cómo no sabemos cómo se distribuyen los datos en cada intervalo, solo podremos indicar en que intervalo se encuentra dicho percentil.

Ejemplo:

En la siguiente tabla se muestra la distribución de las notas en la última prueba de la asignatura de Lenguaje. Determina en qué intervalo se encuentra la mediana, el percentil 70 y el percentil 55.

Notas	N° de alumnos
[3 , 4[	5
[4 , 5[	8
[5 , 6[	11
[6 , 7]	6

Solución:

Si sumamos las frecuencias, obtenemos 5 + 8 + 11 + 6 = 30, luego n = 30.

La mediana corresponde al dato de lugar $\frac{50 \cdot 30}{100} = 15$, luego ubicamos el dato de lugar 15, para ello podemos ir sumando las frecuencias, hasta que sobrepasemos este valor, por ejemplo si sumamos las frecuencias de los dos primeros intervalos, obtenemos 5 + 8 = 13, aún no sobrepasamos los 15, por lo tanto tomamos un intervalo más: 5 + 8 + 11 = 24, por lo tanto la mediana está en el intervalo [5 , 6[. Un método equivalente es calcular la frecuencia acumulada y al primer intervalo que sobrepasemos el percentil, en ese intervalo se encontrará:

Notas	N° de alumnos	Frecuencia acumulada
[3 , 4[	5	5
[4 , 5[	8	13
[5 , 6[	11	24
[6 , 7]	6	

No sobrepasa el valor 15

Sobrepasa el valor 15, en este intervalo está el percentil.

El percentil 70 será el dato de lugar $\frac{70 \cdot 30}{100} = 21$, si ocupamos la técnica anterior, podemos darnos cuenta que también está en el intervalo [5 , 6[.

Si calculamos el percentil 55, tenemos: $\frac{55 \cdot 30}{100} = 16{,}5$, entonces tenemos que calcular el promedio de los datos de lugares 16 y 17, como ambos datos están en el intervalo [5 , 6[, el promedio de ambos sigue estando en ese intervalo, luego el percentil 55 está en el intervalo [5 , 6[.

Resumiendo:

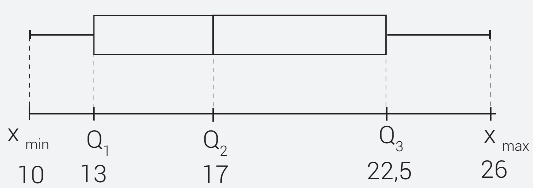
Para datos distribuidos en intervalos:	
1°) Se ordenan los datos en sentido creciente (generalmente los intervalos están ordenados en una tabla en este sentido)	
2°) Se calcula: $\frac{kn}{100}$	
Si resulta decimal:	El percentil se calcula con el promedio de los datos de lugares más cercanos a: $\frac{kn}{100}$ y se determina en qué intervalo está ocupando la frecuencia acumulada.
Si resulta entero:	El percentil es el dato de lugar $\frac{kn}{100}$ y se determina en qué intervalo está ocupando la frecuencia acumulada.

- **Diagrama de cajón y bigotes**

El diagrama de cajón y bigotes, es una representación visual de cuan dispersos están los datos entre los valores mínimo, los cuartiles y el valor máximo.

Ejemplo:

Supongamos que las edades de los nietos de una familia son: 10, 12, 12, 14, 16, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26.
Tenemos que el dato mínimo es 10, el primer cuartil es Q_1=13, el segundo cuartil o mediana es Q_2=17, tercer cuartil o Q_3 = 22,5 y el dato máximo igual a 26.
El diagrama de cajón y bigotes es un rectángulo donde en el extremo izquierdo se ubica Q_1, en el extremo derecho Q_3, y la mediana es una línea vertical que separa a este rectángulo.
Desde los extremos de este rectángulo o caja salen los bigotes que son segmentos que se extienden hasta el valor mínimo y al valor máximo por el otro:

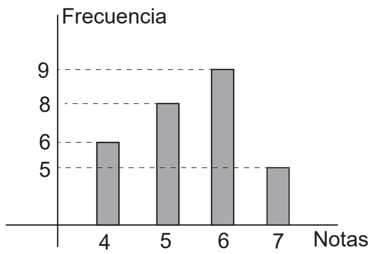


Se llama valor intecuartílico a la diferencia entre Q_3 y Q_1, en este caso es 22,5 – 13 = 9,5, lo que indica que en un rango de 9,5 años está el 50% de los datos (pueden haber más). Por otro si consideramos la partición que produce la mediana, en este ejemplo el lado derecho es mayor que el lado izquierdo, lo que indica que los datos están más dispersos entre la mediana y el tercer cuartil.

15

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En el siguiente gráfico se muestra la distribución de notas de un cierto curso en la última prueba de Física.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada en el gráfico?

A) La mediana es 5,5.
B) La moda es 6,0.
C) La media es inferior a la mediana.
D) El primer cuartil es 4.

Solución:

A) Para calcular la mediana, en primer lugar que determinar cuántos datos son, para ello sumamos las frecuencias: 6 + 8 + 9 + 5 = 28. Como es un número par de datos, los centrales son los de lugares 14 y 15, si sumamos las frecuencias del 4 y del 5 suman 14, por lo tanto el dato de lugar 14 es 5 y el dato 15 es 6, si calculamos la media entre 5 y 6 nos 5,5 por lo tanto la mediana es 5,5 , por lo tanto A es verdadera.

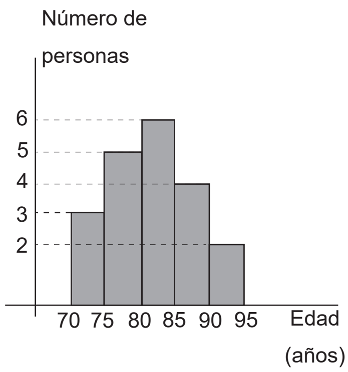
B) La moda es el dato con mayor frecuencia, en este caso es el 6, por lo tanto es correcta.

C) Para calcular la media tenemos que multiplicar cada dato con su respectiva frecuencia, sumar estos productos y el resultado dividirlo con la suma de las frecuencias, entonces

$\overline{x} = \dfrac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 5}{6+8+9+5} = \dfrac{153}{28} \approx 5{,}46$, como la mediana era 5,5, se tiene que la afirmación es verdadera.

D) El primer cuartil es el dato de lugar $\dfrac{1}{4} \cdot 28 = 7$, luego debemos calcular la media entre el 7° y 8° dato, ambos datos son 5, por lo tanto su media es 5, luego E) es falsa.

2. En una casa de reposo, se ha consultado acerca de la edad de los residentes; con esta información se ha construido el siguiente histograma, donde los intervalos son de la forma [a, b[y el último de la forma [a , b].



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Por lo menos el 10% tiene a lo menos 90 años.
B) 85% tiene por lo menos 75 años.
C) El percentil 50 se encuentra en el intervalo [80 , 85[
D) El 30% tiene más de 85 años.

Solución:

A) En el intervalo [90, 95], se ubican 2 personas de un total de 20 (este total lo obtienes sumando las frecuencias), por lo tanto un 10% de los residentes tienen una edad mayor o igual que 90 años, luego A es verdadera

B) Las personas que tienen por lo menos 75 años son: $5 + 6 + 4 + 2 = 17$, pero 17 de un total de 20 corresponde a un 85%, luego es verdadera.

C) El total de datos es 20, para hallar el percentil 50, calculamos $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ y el 10° dato está en el intervalo [80, 85[, luego es verdadera.

D) Si sumamos las frecuencias de los dos últimos intervalos, tenemos $4 + 2 = 6$, de un total de 20, luego un 30% de los datos son mayores o iguales que 85, pero no tienen más de 85, luego es falsa.

15

3. En una fábrica que produce ampolletas de bajo consumo, se ha tomado una muestra de 5000 ampolletas de un determinado modelo y se ha medido su vida útil, obteniéndose lo siguiente:

Nº de horas duración	Nº de ampolletas
10000 - 10100	1000
10101 - 10200	900
10201 - 10300	1100
10301 – 10400	1500
10401 - 10500	500

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El percentil 40 y el percentil 50 están en el tercer intervalo.
B) El percentil 60 está en el tercer intervalo.
C) El percentil 80 está en el cuarto intervalo.
D) El percentil 90 está en el último intervalo.

Solución:

En A), el total de datos es igual a la suma de las frecuencias, en este caso tenemos

1000 + 900 + 1100 + 1500 + 500 = 5000.

El percentil 40 es el dato que está en el lugar $\frac{40 \cdot 5000}{100} = 2000$, si sumamos las frecuencias de los dos primeros intervalos tenemos 1000 + 900 = 1900, con ello no alcanzamos los 2000, pero si sumamos los tres primeros intervalos tenemos 1000 + 900 + 1100 = 3000, luego el dato 2000 está en el tercer intervalo. El percentil 50 está en el lugar $\frac{50 \cdot 5000}{100} = 2500$, por lo visto anteriormente este dato está también en el tercer intervalo, luego la afirmación es verdadera.

En B), el percentil 60 es el dato que está en el lugar $\frac{60 \cdot 5000}{100} = 3000$, si sumamos los tres primeros intervalos,

tal como vimos anteriormente, obtenemos 100 + 900 + 1100 = 3000, luego el dato está en el tercer intervalo, luego B) es verdadera.

En C), el percentil 80 está en el dato de lugar $\frac{80 \cdot 5000}{100} = 4000$, si sumamos las frecuencias de los tres primeros intervalos tenemos 3000, con lo que no alcanzamos aún el dato de lugar 4000, si sumamos los cuatro primeros intervalos, tenemos 4500, luego el percentil 80 se encuentra en el cuarto intervalo, la afirmación es verdadera.

En D), el percentil 90 está en el dato de lugar $\frac{90 \cdot 5000}{100} = 4500$ y tal como vimos anteriormente, alcanzamos

este valor sumando los cuatro primeros intervalos, luego el percentil 90 está en el cuarto intervalo y no en el último, luego es falsa.

4. A un grupo de estudiantes de cuarto medio se le ha aplicado un facsímil de Matemática de 80 preguntas. Con la cantidad de preguntas buenas obtenidas se ha construido la siguiente tabla:

N° preguntas correctas	N° de estudiantes	Frecuencia relativa porcentual
[0 , 20[	4	
[20 , 40[		
[40 , 60[	36	45%
[60 , 80]	20	

¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la tabla?

A) El total de alumnos que rindieron el facsímil es 80.
B) 20 alumnos obtuvieron a lo menos 20 y menos de 40 preguntas buenas.
C) El percentil 50 está en el intervalo [40, 60[.
D) El 30% obtuvo a lo sumo 40 preguntas buenas.

Solución:

Por la información dada, tenemos que el 45% de los datos está en el tercer intervalo, con ello podemos obtener el total de personas que rindieron el facsímil.

Si x es el total de personas, planteamos, $\frac{45}{100}x = 36 \rightarrow x = \frac{36 \cdot 100}{10} = 80$. Por lo tanto A es correcta.

Con el resultado anterior, podemos completar la tabla, con lo que se obtiene:

N° preguntas correctas	N° de estudiantes	Frecuencia relativa porcentual
[0 , 20[	4	5%
[20 , 40[	20	25%
[40 , 60[	36	45%
[60 , 80]	20	25%
Total	80	

B) Es correcta debido a que la frecuencia del intervalo [20 , 40[efectivamente es 20.

C) Para determinar en qué intervalo está el percentil 50 debemos, ir sumando la última columna, hasta sobrepasar el 50%, esto se obtiene sumando las tres primeras frecuencias relativas porcentuales: 5% + 25% + 45% = 75%, luego la mediana está en el tercer intervalo, C) es correcta.

D) Observemos que si sumamos las frecuencias relativas porcentuales de los dos primeros intervalos, obtenemos, 5% + 25% = 30%, por lo tanto un 30% de los que rindieron la prueba obtuvieron menos de 40 preguntas buenas, lo que se contradice con lo enunciado en D, ya que esta afirma que el 30% obtuvo 40 o menos preguntas buenas, luego es falsa.

Visita nuestro portal educativo

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Se tienen los siguientes datos: 20 ; 15 ; 13 ; 11 ; _ , si la media de los cinco datos es 14, ¿qué dato falta?

A) 1
B) 10
C) 11
D) 14

2. Pedro y Exequiel obtienen las siguientes notas durante el primer semestre en la asignatura de Física:

Pedro	3,0	4,5	5,0	5,0	6,0	6,5
Exequiel	3,5	3,9	4,7	5,5	6,5	6,5

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) El rango de las notas de ambos es la misma.
B) Ambos tienen la misma media de notas.
C) La mediana de las notas de Exequiel es mayor que la de las notas de Pedro.
D) La media de las notas de Exequiel es menor que la de las notas de Pedro.

3. Las siguientes tablas de frecuencias ilustran las notas en la última prueba de Historia de dos cuartos medios:

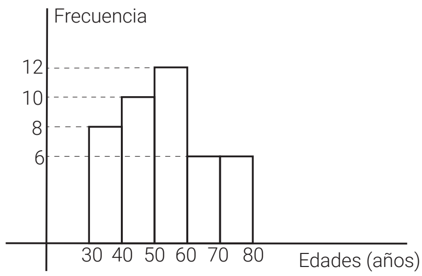
4°A	
Notas	Frecuencia
4	8
5	9
6	7
7	6

4°B	
Notas	Frecuencia
4	3
5	10
6	7
7	6

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La media del 4° A es menor que la del 4° B.
B) Ambos cursos tienen la misma moda.
C) Ambos cursos tienen el mismo rango.
D) Ambos cursos tienen la misma mediana.

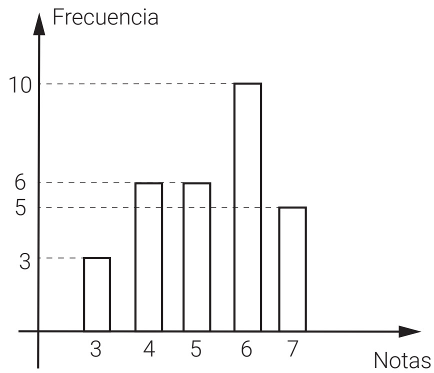
4. En el histograma de la figura adjunta se muestra la distribución de las edades de los pacientes en una cierta ala de un hospital, donde los intervalos son de la forma [a , b[y el último es de la forma [c, d].



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El rango es menor o igual a 50.
B) El primer cuartil está en el intervalo [40, 50[.
C) El tercer cuartil está en el intervalo [60, 70[.
D) El intervalo [60, 70[tiene más de un 15% de los datos.

5. El gráfico de la figura, representa las notas obtenidas por los estudiantes de un curso en una prueba, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



A) Un 30% obtuvo menos de un 4,0.
B) La mediana es un 5,0.
C) Un 40% obtuvo un 4,0 o un 5,0.
D) Un 50% obtuvo al menos un 5,0.

6. Las notas de Joaquín durante los dos semestres en la asignatura de Física son las siguientes

Primer semestre	4,0	4,5	5,0	5,0	6,0	6,2
Segundo semestre	4,5	4,6	5,0	5,0	6,0	6,7

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) En ambos semestres se obtuvo la misma moda.
B) La media de las notas del segundo semestre es superior a las del primer semestre.
C) El percentil 40 de las notas del primer y del segundo semestre no coinciden.
D) El rango de las notas en ambos semestres es el mismo.

7. Para un estudio comparativo de los precios de dos supermercados de la ciudad, se ha tomado una muestra de 5 artículos esenciales, los precios de ellos en estos supermercados, aparecen en la siguiente tabla:

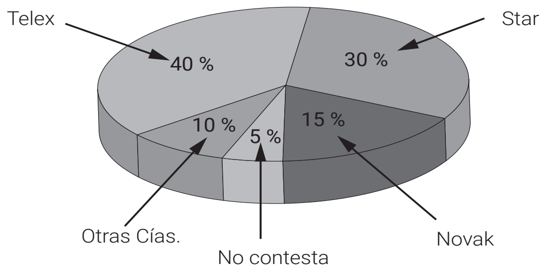
Artículo	Supermercado "La Superior"	Supemercado "La Económica"
Arroz (1 kg)	$ 1.500	$ 1.400
Azúcar (1 kg)	$ 650	$ 700
Aceite (1 L)	$ 3.200	$ 3.300
Lentejas (1 kg)	$ 1.400	$ 1.500
Harina (1 kg)	$ 850	$ 800

¿Cuál de las siguientes afirmaciones **no** es siempre verdadera?

A) En la muestra, el rango de los precios de "La Superior" es menor que de "La Económica".
B) En la muestra, la media de los precios de "La Superior" es menor que de "La Económica".
C) En la muestra, la mediana de los precios de "La Superior" es igual a la de "La Económica".
D) Es más económico comprar en el supermercado "La Superior" que en "La Económica".

8. En el diagrama circular, se muestra el resultado de una encuesta acerca de la compañía de comunicaciones que actualmente utilizan una cierta cantidad de usuarios.
Si se sabe que 210 encuestados utilizan Telex o Star, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Los encuestados fueron 300.
B) 45 usuarios utilizan "Novak".
C) 3 encuestados no contestaron la encuesta.
D) 30 utilizan "Otras Compañías".



9. Veinte alumnos de un colegio han sido seleccionados para competir en una olimpiada interescolar.
La distribución de las edades de los seleccionados se ilustra en la siguiente tabla:

Edad (años)	Frecuencia
[10 , 12[	4
[12 , 14[	5
[14 , 16[	8
[16 , 18]	3

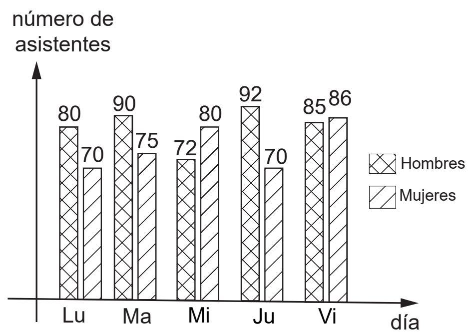
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Un 80% de los alumnos seleccionados tienen 12 o más años de edad.
B) Un 20% tiene a lo sumo 12 años.
C) Un 15% de los alumnos seleccionados tienen 16 o más años de edad.
D) Un 45% de los alumnos seleccionados tienen menos de 14 años de edad.

10. Según los datos del ejercicio anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El primer intervalo tiene una frecuencia relativa de 0,2.
B) La frecuencia acumulada del tercer intervalo es 17.
C) La frecuencia relativa acumulada porcentual del tercer intervalo es 85%.
D) El 45% de los datos son menores o iguales que 14.

11. El número de asistentes a una película durante una semana distribuidos según el sexo, fueron los siguientes:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La media de los asistentes de sexo masculino fue de 83,8 diarios.
B) El rango del número de asistentes varones es 5.
C) La media de los asistentes de sexo femenino fue de 76,2 diarios.
D) La media de asistentes fue de 160 diarios.

12. En la siguiente tabla se muestra la distribución de ausencias de un grupo de trabajadores durante un cierto mes. Si la media es de 1 ausencia al mes, ¿cuántos trabajadores tuvieron 2 días de ausencia?

N° ausencias	Frecuencia
0	14
1	8
2	
3	2
4	2

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4

13. Ana es madre de cuatro hijos universitarios: Juan, Pedro, Luis y Amparo; ella debe entregarles mensualmente una mesada para que cubran sus gastos de locomoción, alimentación y gastos personales.
Como no sabe cuánto dinero destinarle a cada uno, decide anotar en la siguiente tabla los gastos en los cuales incurrieron en el mes pasado:

	Locomoción ($)	Alimentación ($)	Gastos personales ($)
Juan	22.000	48.000	60.000
Pedro	18.000	45.000	52.000
Luis	20.000	50.000	45.000
Amparo	25.000	32.000	48.000
Total ($)	85.000	175.000	205.000

Ana quiere calcular el promedio de gastos mensuales por hijo, para ello suma el total de la locomoción, el total de alimentación, el total de los gastos personales y luego debe realizar una división. Considerando los datos de la tabla, ¿por cuánto debe dividir la suma obtenida?

A) Por 3
B) Por 4
C) Por 5
D) Por 15

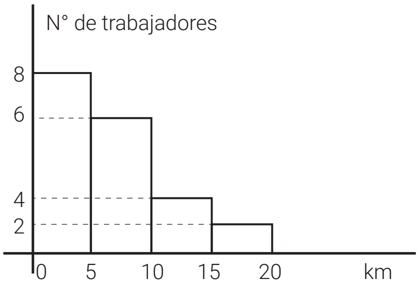
14. En la siguiente tabla se muestra la distribución de los años trabajados en una empresa de todos sus empleados:

Años	Número de trabajadores
0 – 4	18
5 – 9	6
10 – 14	4
15 – 19	12

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

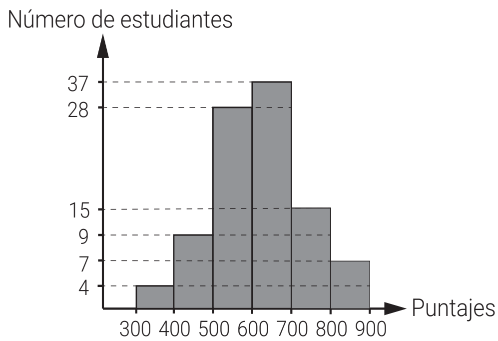
A) El 45% de los trabajadores han trabajado a lo sumo 4 años.
B) El 60% de los trabajadores han trabajado a lo sumo 9 años.
C) El 30% de los trabajadores han trabajado más de 15 años.
D) El 25% de los trabajadores han trabajado entre 5 y 14 años, ambos valores incluidos.

15. En el histograma de la figura adjunta se muestra la distribución de la cantidad de kilómetros que deben recorrer los trabajadores de una industria desde su lugar de residencia a su puesto de trabajo, donde los intervalos del histograma son de la forma [a , b[y el último es de la forma [c , d]. Según la información dada en el gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) Un 40% de los trabajadores debe viajar menos de 5 km.
B) Un 70% de los trabajadores debe viajar menos de 10 km.
C) Un 30% de los trabajadores debe viajar más de 10 km.
D) Un 20% de los trabajadores viaja a lo menos 10 km y menos de 15 km.

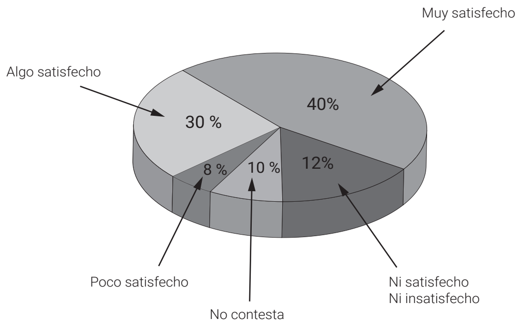
16. En el histograma de la figura se registraron los puntajes de un ensayo PAES de matemática obtenidos por todos los estudiantes de cuarto medio de un colegio de Concepción:



Si los intervalos son de la forma [a, b[y el último es de la forma [c, d], ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) 100 alumnos rindieron el ensayo.
B) La frecuencia relativa acumulada del intervalo [600, 700[es 0,78.
C) La frecuencia relativa del intervalo [400, 500[es 0,09.
D) El 93% obtuvo a lo más 800 puntos.

17. El gráfico circular de la figura adjunta muestra los resultados de una encuesta aplicada a 200 socios de un gimnasio, acerca del nivel de satisfacción que tenían sobre la infraestuctura del mismo:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) 20 personas no contestaron la encuesta.

B) La frecuencia relativa de los que están "muy satisfecho" es $\frac{2}{5}$.

C) Hay una diferencia de 10 encuestados entre los que contestaron "Muy satisfecho" con los que contestaron "Algo satisfecho".

D) La moda es "Muy satisfecho".

18. Las edades de 11 niños (en años) que fueron a un cumpleaños, fueron las siguientes: 5 , 5 , 6 , 6 , 6 , 8 , 8 , 8 , 9 , 9 , 9 . Si después de 2 horas de empezada la fiesta, se retiran dos niños que tenían 5 y 9 años y se agregan dos niños de 6 y 8 años, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La media se mantiene.
B) El rango se mantiene.
C) La mediana se mantiene.
D) El primer cuartil cambia.

19. En una reunión de apoderados se consulta a los padres por la cantidad de hijos que tienen, obteniéndose lo siguiente:

Nº de hijos	0	1	2	3	4
Nº de familias	4	7	8	4	2

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La moda es 8.
B) La mediana es 3.
C) El 44% de las familias tiene menos de 1 hijo.
D) La media de hijos por familia es superior a 1,7.

15

20. En la tabla adjunta se muestra la distribución de las edades de los vehículos que hay a la venta en una compra venta de vehículos usados:

Años	Frecuencia	Frecuencia relativa porcentual
[0 , 3[	2	10%
[3 , 6[		
[6 , 9[	5	
[9 , 12]		30%

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Un 45% de los vehículos tiene menos de 6 años.
B) El intervalo con mayor frecuencia es el segundo.
C) Un 70% de los vehículos tiene a lo más 9 años.
D) El rango de edad de los vehículos es menor o igual a 12 años.

21. Para un estudio acerca de los transtornos alimenticios de los estudiantes de un colegio, se toma una muestra y a cada uno de ellos se calcula su indice de masa corporal (IMC), los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

Categorización	IMC	Frecuencia	Frecuencia relativa
Delgadez severa	< 16		0,05
Delgadez moderada	[16, 17[		0,25
Delgadez aceptable	[17; 18,5[	12	0,15
Normal	[18,5; 25[	32	
Pre -Obeso	[25, 30[		0,15

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) 20 estudiantes presentan “delgadez moderada”.
B) Un 40% de los estudiantes presentan un IMC "normal".
C) Más de 12 personas de la muestra están categorizadas como “Pre-Obeso”.
D) 24 estudiantes tienen un IMC menor a 17.

22. Se ha elegido una cantidad de alumnos de un colegio para que participen en una Olimpiada de Matemática. Según la información dada en la siguiente tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

Edad (años)	Frecuencia	Frecuencia relativa
15	4	
16	5	0,2
17		
18	9	

A) La frecuencia relativa para los 15 años es 0,16.
B) El total de alumnos es 25.
C) La frecuencia acumulada para los 17 años es 16.
D) La frecuencia relativa acumulada para los 17 años es 0,28.

23. La profesora le indica a sus estudiantes que la media de la masa de las alumnas del curso es 65 kilos, elige a 4 de sus estudiantes y les consulta que otra información necesita para determinar la media de todo el curso.

- **Alejandra** dice que bastaría con saber la media de las masas de los estudiantes de sexo masculino.
- **Verónica** dice que bastaría con saber el total de los alumnos del curso.
- **Sergio** dice que es suficiente con saber la media de las masas de los estudiantes de sexo masculino y la cantidad de alumnos del curso.
- **Andrés** dice que es suficiente con saber la media de la masa de los estudiantes de sexo masculino y el porcentaje de mujeres del curso.

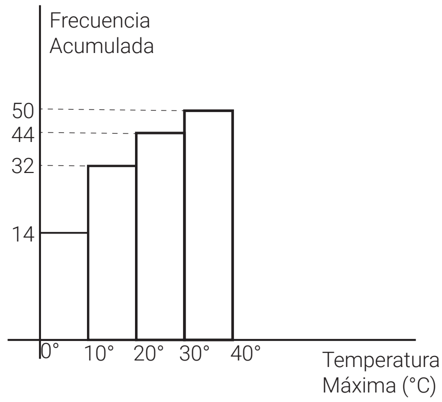
¿Cuál de ellos tiene la razón?

A) Alejandra
B) Verónica
C) Sergio
D) Andrés

24. Se tienen 5 números negativos, ¿cuál de los siguientes estadígrafos **NO** es negativo?

A) Media.
B) Mediana.
C) Rango.
D) Primer cuartil.

25. En el gráfico de la figura adjunta se muestra la frecuencia acumulada de la distribución de las temperaturas máximas en una cierta cantidad de días durante el año pasado en la ciudad de Talca, donde los intervalos son de la forma [a , b[y el último es de la forma [c, d]. A partir de la información dada en el gráfico se construyeron las siguientes tablas de frecuencias relativas, ¿cuál de ellas es la correcta?



A)

Temp. Máx (°C)	Frecuencia relativa
[0, 10[	0,14
[10, 20[	0,32
[20, 30[	0,44
[30, 40]	0,50

B)

Temp. Máx (°C)	Frecuencia relativa
[0, 10[	14
[10, 20[	18
[20, 30[	12
[30, 40]	6

C)

Temp. Máx (°C)	Frecuencia relativa
[0, 10[	28
[10, 20[	36
[20, 30[	24
[30, 40]	12

D)

Temp. Máx (°C)	Frecuencia relativa
[0, 10[	0,28
[10, 20[	0,36
[20, 30[	0,24
[30, 40]	0,12

26. En un cuarto medio de un colegio el a% tiene 17 años y el resto tiene 18 años, ¿cuál es la media del curso?

A) 17,5
B) $17a + 18(100 - a)$
C) $0{,}17a + 0{,}18(100 - a)$
D) Ninguna de ellas.

27. En la siguiente tabla se muestra la distribución de las distancias alcanzadas por un grupo de atletas en la disciplina de lanzamiento de la bala:

Lanzamiento (m)	Frecuencia
[13 , 14[	2
[14 , 15[	5
[15 , 16[	4
[16 , 17]	1

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El percentil 50 está en el segundo intervalo.
B) El tercer cuartil está en el tercer intervalo.
C) El 75% obtuvo en su lanzamiento más de 14 m y menos de 16 m.
D) Más de la mitad de los atletas alcanzaron un lanzamiento inferior a 15 m.

28. Las edades de los seleccionados de un colegio para un torneo de baby fútbol son las siguientes: 16 , 16 , 17 , 18 , 16 , 17 , 18 , 17, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La media es menor a 17 años.
B) El rango es 2.
C) La mediana es 17.
D) El percentil 40 es 16.

29. En el siguiente diagrama de tallo y hojas se muestran las notas obtenidas por Alberto en la asignatura de Lenguaje durante el primer semestre:

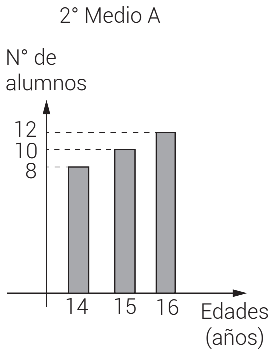
4	2
5	1 1 7
6	0 7

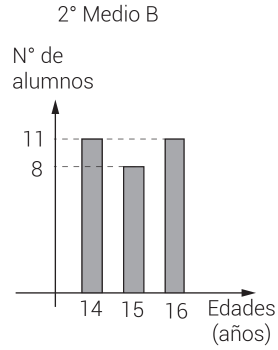
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La moda es menor que la mediana.
B) La moda coincide con el primer cuartil.
C) El tercer cuartil es mayor a 5,7.
D) El percentil 30 es menor que el percentil 40.

15

30. En los siguientes gráficos se muestran las distribuciones de edades de dos cursos de un colegio.





¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada?

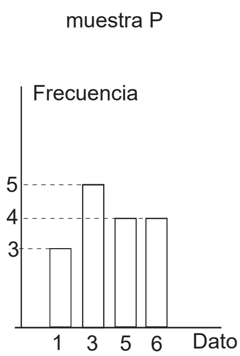
A) La mediana de las edades de ambos cursos es la misma.

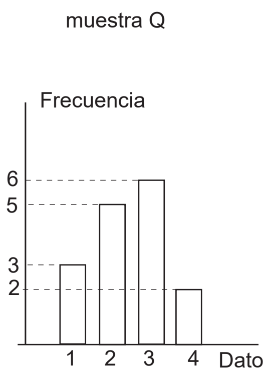
B) El percentil 60 del 2°A es superior al correspondiente del 2°B.

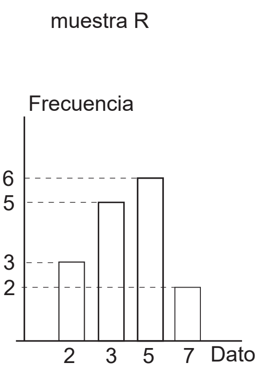
C) En ambos cursos, los que tienen 16 años son menos del 40%.

D) En ambos cursos, menos del 65% tiene a lo sumo 15 años.

31. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada en los siguientes gráficos?







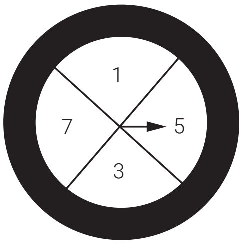
A) Q y R no tienen la misma moda.

B) En P y R el primer cuartil es 3.

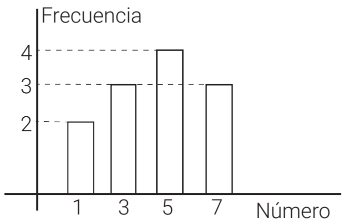
C) En Q la media es inferior a 3.

D) En R la media y la mediana coinciden.

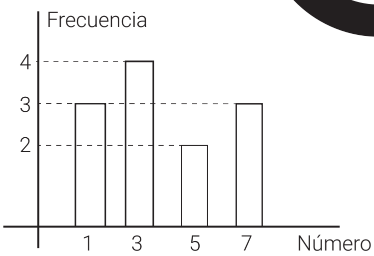
32. Alberto, Marta, Leonor y Carlos, se entretienen lanzando la ruleta de la figura, obteniendo cada uno de ellos los resultados que se muestran en las siguientes gráficas:



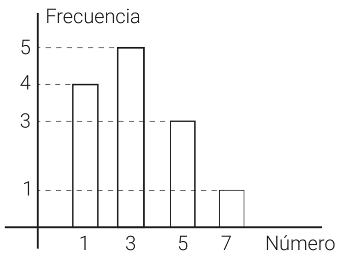
Alberto:



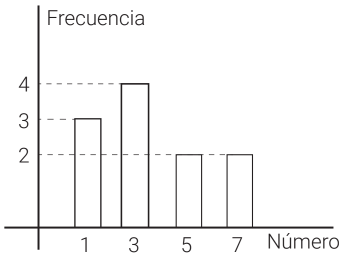
Marta:



Leonor:



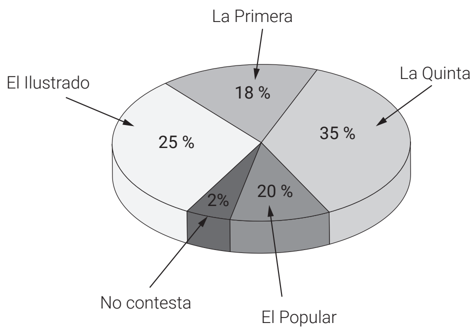
Carlos:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) **Alberto** tuvo una media superior a 4,3 y su mediana es 5.
B) **Marta** tuvo una media superior a 3,8 y su tercer cuartil es 6.
C) **Leonor** tuvo una media superior a 3,1 y su tercer cuartil es 5.
D) **Carlos** tuvo una media superior a 3,5 y su mediana es 4.

33. El diagrama circular de la figura, muestra el resultado de una encuesta aplicada a 400 personas, donde se les consultó acerca del diario de su ciudad que frecuentemente leían.
Según la información dada en el gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

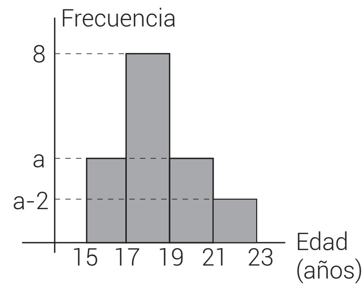


A) 80 de los encuestados prefieren “El Popular”.
B) 8 de los encuestados no contestaron.
C) La diferencia entre los que contestaron “La Quinta” y “La Primera” fue de 68 encuestados.
D) Más de 280 encuestados contestaron que leían “El Ilustrado” o “La Quinta”.

34. En una bodega se almacenan lentejas, las que se clasifican según su diámetro, el cual puede ser de 6 mm, 7 mm u 8 mm. Se sabe que del total de las lentejas almacenadas el 40% son de 6 mm y la media es 6,7 mm, ¿qué porcentaje son de 7 mm?

A) 10%
B) 16%
C) 40%
D) 50%

35. En el histograma de la figura se muestra la distribución de las edades de unos jóvenes que asistieron a un evento deportivo, donde los intervalos se han construido de la forma [a, b[, excepto el último que es de la forma [c, d]. Si la frecuencia relativa del intervalo [21, 23[es $0,1\overline{6}$, ¿cuál es la frecuencia relativa del intervalo [15, 17[?



A) 0,20
B) 0,25
C) 0,30
D) 0,40

36. Los resultados de una prueba de Ciencias en dos cursos de 4º medio fueron los siguientes:

Curso	Número de alumnos	Media del curso
4°A	20	5,0
4°B	30	6,0

Según estos datos, ¿cuál es la media de estos alumnos de cuarto medio en esta prueba?

A) 5,4
B) 5,5
C) 5,6
D) 5,8

37. En un curso la media de las notas de m alumnos en la última prueba de química fue a y la media de los n alumnos restantes es b, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde a la media del curso?

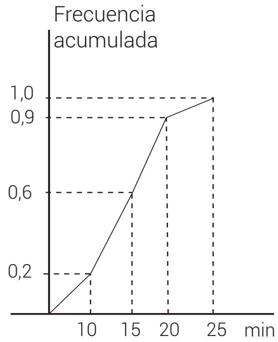
A) $\frac{ma + nb}{2}$

B) $\frac{ma + nb}{a + b}$

C) $\frac{ma + nb}{m + n}$

D) $\frac{a + b}{2}$

38. Se ha aplicado un test de comprensión lectora a un grupo de estudiantes de un colegio, en el siguiente gráfico de frecuencias relativas acumuladas se muestran los tiempos que se demoraron en contestarlo donde los intervalos son de la forma [a, b[y el último de la forma [a, b]:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El 20% terminó antes de los 10 minutos.
B) El 40% demoró a lo menos 10 minutos y menos de 15 minutos.
C) El 80% demoró a lo menos 10 minutos y a lo más de 25 minutos.
D) El 90% demoró 20 minutos.

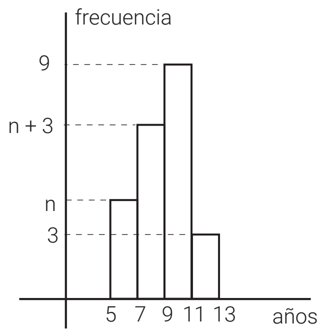
39. La siguiente tabla muestra el número de computadores vendidos por día en una tienda.

N° artículos	Frecuencia
[0 , 5[	3
[5 , 10[	5
[10 , 15[	4
[15 , 20[	6
[20 , 25]	12

Según los datos de esta tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir?

A) El intervalo con mayor frecuencia es [20 , 25].
B) Por lo menos en un 30% de los días se vendieron más de 4 y menos de 16 computadores.
C) En un 60% de los días hubo una venta superior a 15 computadores diarios.
D) En más de un 70% de los días se vendieron más de 8 computadores por día.

40. En el histograma de la figura, los intervalos son de la forma [a, b[y el último es de la forma [c, d], en él se muestra la cantidad total de alumnos(as) que a fines del año pasado se cambiaron de colegio según su edad:



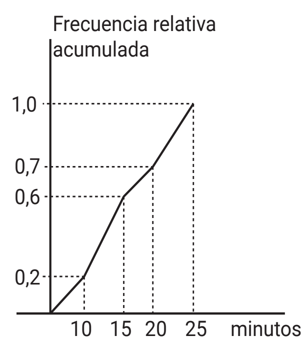
Se pregunta a cuatro estudiantes que información se necesita para determinar el total de alumnos(as) que se cambiaron de colegio.

- **Patricia** dice que basta con saber que la frecuencia relativa del intervalo [7, 9[es 0,32.
- **Luisa** dice que es suficiente con saber cuántos estudiantes tenían a lo sumo 9 años.
- **Verónica** dice que basta con saber que la frecuencia relativa acumulada del intervalo [9, 11[es 0,88.
- **Carla** dice que es suficiente con saber la frecuencia relativa del intervalo [11, 13]

¿Cuál de ellas se equivoca?

A) Patricia
B) Luisa
C) Verónica
D) Carla

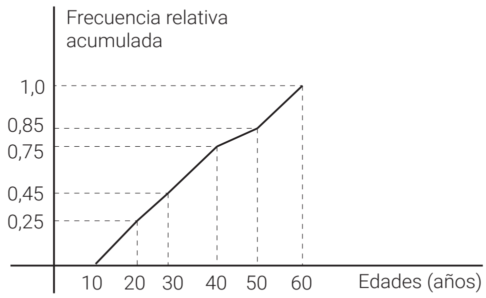
41. Se ha consultado a 60 personas acerca del tiempo medio de espera de una línea de buses a cierta hora del día. Las respuestas se muestran en el siguiente gráfico de frecuencias relativas acumuladas donde los intervalos son de la forma [a, b[y el último de la forma [a, b]:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

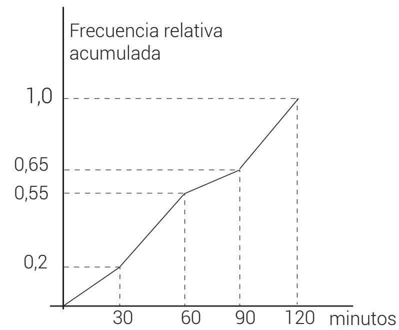
A) 40% esperó más de 15 minutos.
B) 18 esperaron más de 20 minutos.
C) 36 personas esperaron menos de 15 minutos.
D) 12 esperaron a lo sumo 10 minutos.

42. En la ojiva de la figura se muestra la distribución de las edades de 20 personas que asisten a un cumpleaños, donde los intervalos son de la forma [a , b[y el último es de la forma [c, d]. A partir de la información dada en este gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El 20% de invitados tiene 20 o más años pero menos de 30 años.
B) El 85% de los invitados tiene a lo sumo 50 años.
C) El percentil 50 está en el intervalo [30, 40[.
D) El percentil 60 está en el intervalo [30, 40[.

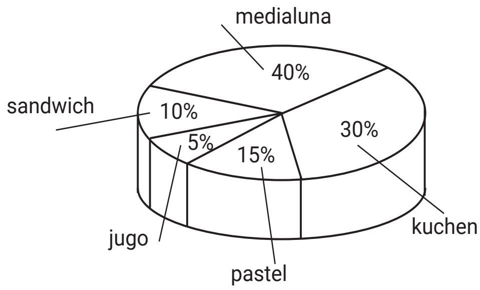
43. A un grupo de estudiantes se le ha aplicado una prueba de diagnóstico de Ciencias, cuya duración es de 120 minutos. Con el tiempo en que demoraron en responder este test se ha construido la siguiente ojiva, donde los intervalos son de la forma [a, b[y el último de la forma [a, b], ¿cuál de las siguiente afirmaciones es **FALSA**?



A) La mediana se encuentra en el intervalo [30 , 60[.
B) Menos del 70% se demora menos de 90 minutos en responder este test.
C) La cantidad de estudiantes que demoraron a lo menos 30 minutos y menos de 60 minutos es la misma que los demoraron entre 90 y 120 minutos, ambos valores incluidos.
D) Un 10% se demoró más de 60 minutos y menos de 90 minutos.

15

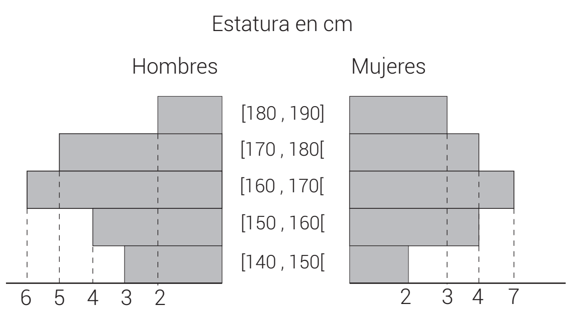
44. En una cafetería, en una cierta mañana se ha hecho un estudio acerca del artículo con que acompañaban el te o café, los resultados se muestran en la siguiente tabla:



Si la diferencia entre los que eligieron medialuna y sandwich fueron 12 clientes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) 4 eligieron sandwich.
B) 28 no eligieron kuchen.
C) La frecuencia relativa de los que eligieron jugo es 0,125.
D) La cantidad de clientes que eligieron pastel o jugo es 8.

45. En el gráfico de la figura adjunta, se muestra la distribución de las estaturas, según sexo, en un cierto curso. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir a partir de la información entregada?



A) La cantidad tanto de hombres y mujeres que miden menos de 170 cm es la misma.
B) La estatura más frecuente tanto de hombres y mujeres está en el mismo intervalo.
C) Hay más hombres que mujeres que miden menos de 150 cm.
D) El primer cuartil tanto de hombres y mujeres está en el mismo intervalo.

15

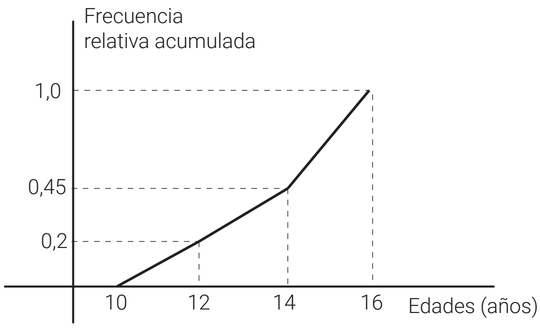
46. Los alumnos de un curso rinden un test de diagnóstico de Inglés, cuya duración máxima es de 100 minutos. En la siguiente tabla se muestra la distribución del tiempo que demoraron los estudiantes en responderlo:

Minutos	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
[0, 20[	5	
[20, 40[		0,1
[40, 60[	12	
[60, 80[	16	0,4
[80, 100]		

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) El 80% demoró más de 20 minutos y menos de 80 minutos.
B) Menos de 10 estudiantes demoraron a lo más 40 minutos
C) Menos del 8% demoró a lo menos 80 minutos.
D) El 12,5% demoró a lo sumo 20 minutos.

47. La profesora de matemática, presenta a sus estudiantes el siguiente gráfico de frecuencias relativas acumuladas donde se muestra la distribución de las edades de los integrantes de una patrulla de boy scout, donde los intervalos son de la forma [a , b[y el último es de la forma [c, d]. A continuación le solicita a cuatro de sus estudiantes que le digan que información necesitan para determinar cuántos alumnos están entre los 14 y 16 años (ambos valores incluidos).

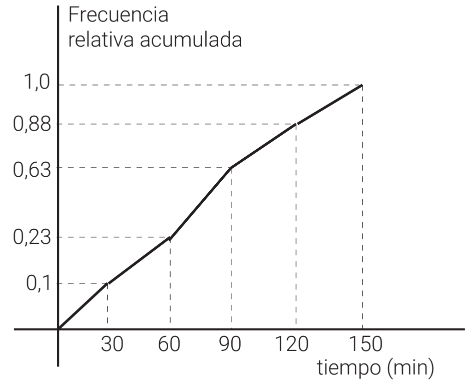


- **René** dice que bastaría con saber el total de integrantes de la patrulla.
- **Jorge** dice que es suficiente con saber cuántos tienen a los sumo 12 años.
- **Georgina** dice que es suficiente con saber cuántos tienen menos de 14 años.
- **Carolina** dice que bastaría con saber cuántos tienen a lo menos 12 y a lo más 16 años.

¿Cuál de ellos se equivoca?

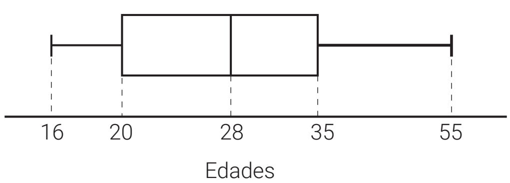
A) René
B) Jorge
C) Georgina
D) Carolina

48. En el siguiente gráfico de frecuencias relativas acumuladas se muestra la cantidad de minutos que demoran 300 trabajadores en llegar a su casa, después de trabajar, donde los intervalos son de la forma [a , b[y el último es de la forma [c, d]. A partir de la información dada en este gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El 88% de los trabajadores demora menos de 2 horas en llegar a su casa.
B) 120 trabajadores demoran a lo menos 60' y menos de 90´en llegar a su casa.
C) El intervalo con mayor frecuencia es el último.
D) 69 trabajadores demoran menos de 1 hora en llegar a su casa.

49. La distribución de edades de los socios de un club de ajedrez se muestra en el siguiente diagrama de caja:

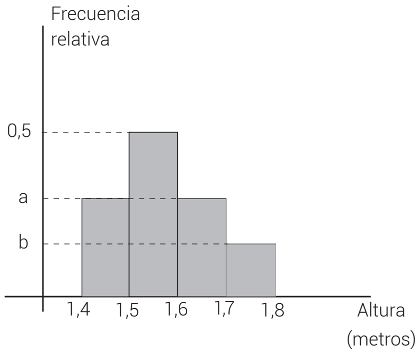


Según este diagrama, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) El promedio de las edades de los socios es 28 años
B) La cantidad de socios que tienen entre 35 y 55 años (ambos incluidos) es mayor que la cantidad de socios entre 16 y 20 años (ambos incluidos).
C) Un 50% de los socios tienen 28 años.
D) El rango intercuartílico de las edades de los socios es 15 años.

15

50. Para un estudio de la estatura de los estudiantes de un colegio se ha tomado una muestra. Con los datos obtenidos se ha construido el siguiente histograma, donde los intervalos son de la forma [a, b[y el último de la forma [a, b]. Si a = 2b, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El 20% mide menos de 150 cm.
B) El 90% mide más de 1,4 m y a lo sumo 1,7 m.
C) El tercer cuartil está en el tercer intervalo.
D) El primer cuartil está en el segundo intervalo.

51. Se toma una muestra para el estudio de las edades de los alumnos de preescolar de un colegio, la frecuencia y la frecuencia acumulada de los datos obtenidos se ilustran en la siguiente tabla:

Edad	Frecuencia	Frecuencia acumulada
2	1	
3		n
4	3n + 5	3n + 10

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La media es 3,76.
B) La frecuencia relativa para los tres años es 0,2.
C) El total de los datos de la muestra es 25
D) La mediana es 4.

52. En la siguiente tabla se muestra la distribución de todos los datos de una variable:

Variable	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[0 , a[	p	
[a , b[	q	r + 10
[b , c[	r - 1	19
[c , d[	r	
[d , e]	p	30

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $r > q$
B) $p + r < q$
C) $p = 2r$
D) $p + q = 3r$

53. En la siguiente tabla, se muestra la vida útil de teléfonos celulares de un cierto modelo (en meses) según una muestra obtenida a partir de la información dada por los usuarios de una compañía.

Meses de duración	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Acumulada Porcentual
[0 , 12[	A	D	15%
[12 , 24[	B	E	50%
Mayor o igual a 24	C	F	100%

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) D + E = F
B) La mitad de los celulares de la muestra dura más de dos años.
C) La mitad dura a lo menos 1 año y menos de 2 años.
D) A + B = C

54. La media de las notas de 20 alumnos en la última prueba de Matemática es 5,8 y una de las pruebas por error se anotó un 4,4 y era un 6,4. Después de hacer la corrección, la media de las notas

A) aumentará en dos décimas.
B) disminuirá en una décima.
C) aumentará en una décima.
D) no variará.

55. Un dado es lanzado una cierta cantidad de veces y los resultados obtenidos se indican en la tabla de frecuencias siguiente:

x	f
1	0
2	5
3	4
4	3
5	2
6	x

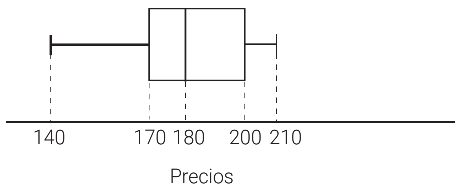
¿Cuánto debe valer x para que la media de los datos sea 3,5?

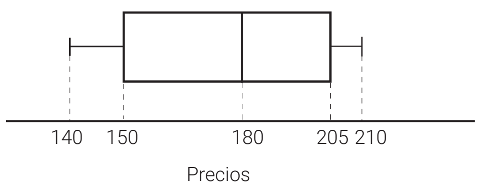
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

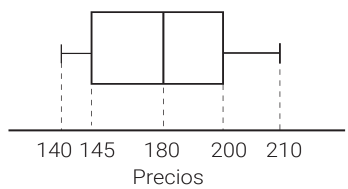
56. Para un estudio acerca del valor de un cierto analgésico, se consulta en 7 farmacias por el valor de este artículo, obteniendo los siguientes precios:

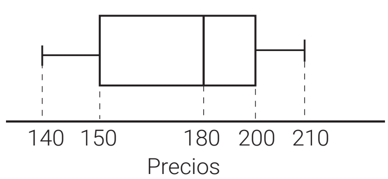
$ 140	$ 150	$ 170	$ 180	$ 200	$ 205	$ 210

¿Cuál de los siguientes diagramas de cajón corresponde al de los datos anteriores?

A)


B)


C)


D)


15

57. Se ha tomado un facsímil de matemática a los cuartos medios de un colegio, los resultados se muestran en la siguiente tabla de frecuencias acumuladas:

Puntajes	Frecuencia acumulada
[350 , 450[	n
[450 , 550[	n+45
[550 , 650[	6n
[650 , 750[	6n+90
[750 , 850]	10n

Si hay 30 estudiantes que obtuvieron entre 750 y 850 puntos (ambos valores incluidos), ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) 300 alumnos rindieron el facsímil.
B) 30 alumnos obtuvieron a lo menos 350 y menos de 450 puntos.
C) 180 alumnos obtuvieron a lo menos 550 y menos de 650 puntos.
D) Un 25% de los estudiantes que rindieron el facsímil obtuvo menos de 550 puntos.

58. Se analiza el número de artículos fallados que produce una máquina, para ello se considera su producción en 2 días. En la siguiente tabla se muestra el % producido por día y el % de artículos fallados en cada uno de ellos.

	día 1	día 2
Tamaño	60 %	40 %
% artículos fallados	10 %	20 %

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Más del 50% de los artículos son del día 1 y no tienen fallas.
B) Más del 80% no presentan fallas.
C) Hay más artículos fallados en el día 2 que en el día 1.
D) Los articulos fallados corresponden al 30% del total.

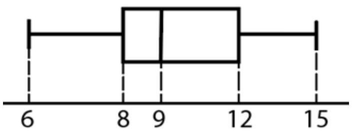
59. Para el control de calidad en la vida útil de un cierto artículo, se toman dos muestras. En las siguientes tablas se muestran los años de vida útil del artículo con $p < q < r$:

Muestra A		**Muestra B**	
Años de vida útil	**Frecuencia**	**Años de vida útil**	**Frecuencia**
p	2	p	3
q	5	q	4
r	3	r	3

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La mediana de los años de ambas muestras es la misma.
B) La media de los años de la muestra A es mayor que la media de la muestra B.
C) El rango de ambas muestras es el mismo.
D) El primer cuartil en ambas muestras coinciden.

60. El diagrama de cajón de la figura representa la distribución de edades de 7 hermanos.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de este gráfico?

A) Por lo menos uno de los hermanos tiene 6 años.
B) Por lo menos uno de los hermanos tiene 9 años.
C) El 25% de los hermanos tiene a lo sumo 8 años.
D) A lo menos el 50% de los hermanos tiene entre 8 y 12, incluyendo ambos valores.

Capítulo 16

PROBABILIDADES

Los orígenes de la probabilidad se remontan desde el siglo XVI, cuando **Gombauld**, propuso a Pascal un problema de cómo repartir las apuestas entre los jugadores antes de que el juego concluya. Actualmente, las probabilidades presentan múltiples aplicaciones en áreas tan diversas como la meteorología, la biología, la química, la astronomía, la aviación comercial, la industria farmacéutica, la medicina, la industria, la predicción de atentados terroristas, etc.

CONCEPTOS CLAVES

- Regla de Laplace
- Ley de los Grandes Números
- Probabilidad de unión de eventos
- Probabilidad de intersección de eventos

REGLA DE LAPLACE

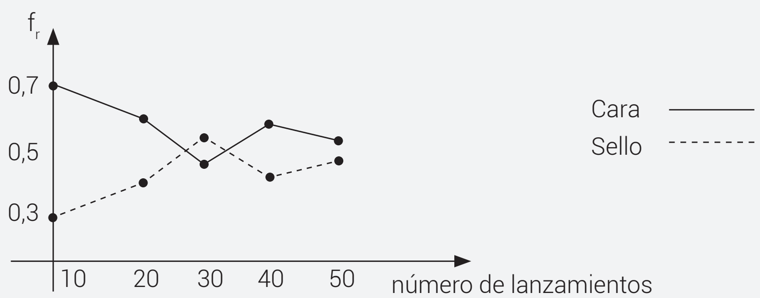
La regla de Laplace, nos permite calcular la probabilidad de un evento como el cuociente entre los casos favorables y los casos totales. La restricción a esta regla es que los casos son equiprobables, es decir todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}}$$

Observación: si se lanza una moneda dos veces y afirmamos que los elementos del espacio muestral son cara-cara, sello-sello y cara-sello, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{1}{3}$, es un error debido a que los elementos del espacio muestral no son equiprobables. En este caso debes considerar como espacio muestral {cara-cara, sello-sello, cara-sello, sello-cara}, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{2}{4}$ o un 50%.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La ley de los Grandes Números señala que si un experimento se repite muchísimas veces, la frecuencia relativa de la ocurrencia del suceso se irá acercando a un valor constante, ese valor constante es la probabilidad del suceso.
En la gráfica se observan, como a medida que aumentamos el número de lanzamientos de una moneda, la frecuencia relativa del número de caras y el número de sellos se acerca 0,5, lo que corresponde a la probabilidad del evento.



Ejemplo:
Supongamos que lanzamos una pareja de dados y sumamos los puntajes de ambos dados, esquematicamente obtenemos el siguiente espacio muestral:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

16

La probabilidad de que los dados sumen 5 son 4 casos de 36:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Por la Ley de Laplace, tenemos que la probabilidad es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, por otra parte, por la Ley de Los Grandes Números, si repetimos este experimento muchísimas veces, la frecuencia relativa se irá acercando a este valor.

Por ejemplo si lanzamos 3.600 veces esta pareja de dados, tendremos que aproximadamente 400 veces la suma será 5, pero no podemos asegurar que exactamente sea esa cantidad de veces.

PROBABILIDAD DE UNIÓN E INTERSECCIÓN DE EVENTOS

Sean A y B dos eventos, para calcular la probabilidad de $A \cup B$, esto es, que ocurra uno o el otro, ocupamos la siguiente propiedad:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Donde $A \cap B$ se refiere a que ocurran ambos eventos (intersección de los eventos).

Ejemplo:

En una fábrica hay dos turnos, el diurno y el nocturno, la distribución por sexo se muestra en la siguiente tabla:

	hombres	**mujeres**
diurno	32	18
nocturno	22	8

Si se elige un(a) empleado(a) al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno o sea de sexo femenino?

Solución:

La probabilidad pedida corresponde a la unión de eventos, por lo tanto tenemos que ocupar la propiedad:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Tenemos que, en el turno nocturno, trabajan 22 + 8 = 30 personas y el total de empleados es

32 + 18 + 22 + 8 = 80, luego P(nocturno) = $\frac{30}{80}$. Por otro lado, la probabilidad de elegir a alguien del sexo femenino es $\frac{26}{80}$, además la probabilidad de que ocurran ambos eventos, es decir que sea del turno nocturno y sea del sexo femenino es $\frac{8}{80}$.

Entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$.

Observación: al calcular la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno dijimos que eran 30 personas de un total de 80, por otro lado al calcular la probabilidad de que sea de sexo femenino es 26 de 80, si sumamos ambas cantidades, obtenemos 56 de 80, al hacerlo así estaríamos considerando las personas de sexo femenino que trabajan en el turno nocturno en ambas cantidades, por esto debemos restar 8 de 80, de modo que $P(A \cup B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80}$. La probabilidad de $A \cap B$ se puede calcular multiplicando las probabilidades de A y B, solo en el caso en que los eventos sean independientes, esto es que la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$, solo si A y B son independientes.

Por ejemplo si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 y en la moneda salga un sello, se calcula multiplicando la probabilidad de ambos eventos, ya que la ocurrencia de uno no afecta al otro, entonces, $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 o en la moneda salga el sello, debemos calcularlo utilizando la propiedad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

En este caso $P(4) = \frac{1}{6}$, $P(S) = \frac{1}{2}$ y por lo visto anteriormente $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$,

luego $P(4 \text{ o } S) = P(4) + P(S) - P(4 \text{ y } S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

TRIÁNGULO DE PASCAL

El triángulo de Pascal es una configuración numérica, donde en cada fila se empieza y se termina con un uno y los términos del medio se obtienen al sumar los dos términos cercanos que están en la fila superior.

- Primera fila, ponemos un uno.
- Segunda fila, ponemos dos unos.
- Tercera fila, un uno al principio, otro al final y el número central es la suma de los dos unos que están en la fila superior.
- Cuarta fila, un uno al principio, otro al final y los números del medio se obtienen sumando los números cercanos de la fila superior, etc.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Veamos ahora, como se aplica al cálculo de probabilidades.
Supongamos que lanzamos 4 monedas, entonces nos dirigimos a la quinta fila, o bien nos podemos guiar buscando aquella fila cuyo segundo número es un 4:

	1	4	6	4	1
Ponemos entonces	C^4	C^3S	C^2S^2	CS^3	S^4

Observa que los exponentes de C van bajando mientras los de S van subiendo, pero si sumas ambos siempre se obtiene 4.
Entonces $4C^3S$, hace alusión que hay cuatro casos en que hay tres caras y un sello, $6C^2S^2$, nos indica que hay seis casos en que hay dos caras y dos sellos, $4CS^3$, indica que hay cuatro casos que hay una cara y tres sellos, etc. El total de casos se obtiene sumando todos los coeficientes:
$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.
De lo anterior, tenemos entonces que si lanzamos 4 monedas la probabilidad de que salgan dos caras y dos sellos, son 6 casos de un total de 16, es decir la probabilidad es $\frac{6}{16}$ o bien $\frac{3}{8}$.
Para calcular la probabilidad de obtener a lo más dos caras, tendríamos 11 casos favorables:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ C^4 & C^3S & \boxed{C^2S^2 \quad CS^3 \quad S^4} \end{array}$$

Luego la probabilidad es $\frac{11}{16}$.

El triángulo de Pascal lo podemos ocupar siempre que tengamos solo dos casos posibles, como cara-sello, encendido-apagado, varón-hembra, verdadero-falso, etc. Además el método visto en esta sección, es válido cuando ambos eventos son equiprobables.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En una caja hay 6 bolitas blancas y 3 rojas, en una segunda caja hay 4 bolitas blancas y 2 rojas. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{1}{3}$

Solución:

Acá tenemos que considerar dos casos favorables, sacar blanca-blanca o roja-roja.

La probabilidad de sacar una bolita blanca de la primera caja es $\frac{6}{9}$ o $\frac{2}{3}$, sacar blanca de la segunda caja es $\frac{4}{6}$ o $\frac{2}{3}$, utilizando que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ para eventos independientes, tenemos que la probabilidad de sacar blanca de la primera y blanca de la segunda es $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Por otro lado, sacar roja de la primera caja es $\frac{1}{3}$ y roja de la segunda también es $\frac{1}{3}$, por lo tanto sacar bolitas rojas en ambas cajas es $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, como puede ocurrir blanca-blanca o roja-roja, sumamos ambas probabilidades: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$, respuesta C)

16

2. Se ha consultado a 30 personas si endulzan su té o café con endulzante o azúcar. Las respuestas de sus preferencias se muestran en la siguiente tabla:

	Hombres	Mujeres
Azúcar	12	8
Endulzante	6	4

Si se elige uno de las personas consultadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de sexo femenino o haya elegido endulzante?

A) $\frac{11}{15}$

B) $\frac{2}{15}$

C) $\frac{8}{15}$

D) $\frac{3}{5}$

Solución:

Si "F" es el evento de ser de sexo femenino y "E" es el evento haber elegido endulzante, tenemos que calcular $P(F \cup E)$, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, entonces hay que calcular las probabilidades respectivas y ocupar esta propiedad.

Se tiene que $P(F) = \frac{12}{30}$, $P(E) = \frac{10}{30}$, $P(F \cap E) = \frac{4}{30}$,

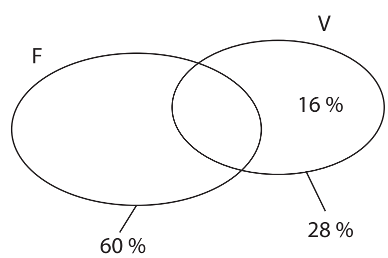
Luego $P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(F \cap E) = \frac{12}{30} + \frac{10}{30} - \frac{4}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$, respuesta D).

3. En un cierto curso, deben elegir un taller optativo para practicar fútbol o vóleibol o ambos. Si se elige un(a) alumno(a) al azar, la probabilidad de que elija fútbol es un 60%, que elija vóleibol es de un 28% y que elija vóleibol y no fútbol es un 16%, ¿cuál es la probabilidad de que elija fútbol y no vóleibol?

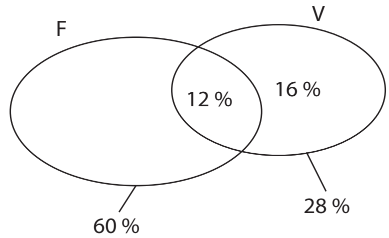
A) 0,12
B) 0,32
C) 0,38
D) 0,48

Solución:

Si ocupamos un diagrama de Venn para representar la situación, tenemos lo siguiente:



Si restamos 28% con 16% obtenemos 12%, que es la probabilidad de que practique ambos deportes:



Ahora restamos 60% con 12%, nos da 48% que sería la probabilidad de que practique fútbol pero no vóleibol, respuesta D).

4. Se tienen tres cajas: A, B y C. En A hay tres bolitas blancas y dos negras, en B hay 2 blancas y tres negras y en C hay 4 blancas y 2 negras. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar 2 bolitas blancas y una negra?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{25}$

C) $\frac{6}{25}$

D) $\frac{32}{75}$

Solución:

En esta situación los casos favorables son bbn, bnb, nbb, calcularemos cada una de estas probabilidades y luego las sumamos.

Caso bbn, la probabilidad de blanca en A es $\frac{3}{5}$, blanca en B es $\frac{2}{5}$ y negra en C es $\frac{2}{6}$, entonces

P(bbn) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{25}$, análogamente obtenemos que P(bnb) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{6}{25}$ y P(nbb) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{75}$,

sumando las tres probabilidades, obtenemos: $\frac{2}{25} + \frac{6}{25} + \frac{8}{75} = \frac{32}{75}$, respuesta D).

5. Una librería ha comprado una partida de lápices rojos y azules de las marcas A y B. Se sabe que el total de lápices es 90, de los cuales 40 son de la marca B y hay un total de 10 rojos de los cuales 4 son de la marca B, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si se elige un lápiz al azar, la probabilidad de que sea rojo es $\frac{1}{9}$.

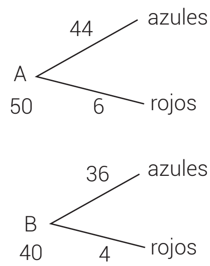
B) Si se elige un lápiz al azar, es mayor la probabilidad de obtener un lápiz rojo en la marca A que en la marca B.

C) Si se elige un lápiz al azar, la probabilidad de elegir uno azul de la marca B es mayor al 50%.

D) Si se elige al azar un lápiz dentro de los azules, la probabilidad de que sea de A es un 55%.

Solución:

La información dada en el enunciado se puede ordenar en un diagrama de árbol como se muestra a continuación:



En A), el número de lápices rojos son 10 de un total de 90, luego la probabilidad es $\frac{10}{90}$ o $\frac{1}{9}$, luego A) es verdadera.

En B), la probabilidad de obtener rojo en la marca A es $\frac{6}{50}$ = 0,12, mientras que en la marca B es $\frac{4}{40}$ = 0,1, luego la afirmación es verdadera.

En C), la probabilidad de elegir un lápiz azul de la marca B es $\frac{36}{90}$ lo que es menor al 50%, por lo tanto C) es falsa.

En D), los lápices azules son 44 + 36 = 80, y de estos los que son de A son 44, luego la probabilidad es $\frac{44}{80}$ o bien $\frac{11}{20}$, que equivale al 55% luego la afirmación es verdadera. Por lo tanto la falsa es C).

6. Las probabilidades de que tres basquetbolistas acierten en un tiro libre son 0,8, 0,8 y 0,9 respectivamente. Si los eventos son independientes, y cada uno lanza un tiro libre, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos acierte?

A) 0,4%
B) 50%
C) 99%
D) 99,6%

Solución:

Observa que el evento pedido es complementario al evento de que ninguno de ellos acierte.
La probabilidad de los tres no acierten es: $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}004$ (se multiplican porque son eventos independientes entre sí), por lo tanto la probabilidad de que al menos uno de ellos acierte es $1 - 0{,}004 = 0{,}996$, luego la probabilidad pedida es 99,6%, respuesta D).

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable al lanzar un dado?

A) Que salga un número impar.
B) Que salga un múltiplo de seis.
C) Que salga un número divisor de seis.
D) Que salga un número primo.

2. Al lanzar un dado, la probabilidad que el resultado sea par o primo es

A) 1

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{5}{6}$

3. Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que el primero sea un número par y el segundo sea un múltiplo de tres?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{5}{6}$

D) $\frac{5}{12}$

4. En la tabla adjunta, se muestran los años que tienen los vehículos que están a la venta en una automotora. Si se elige uno de estos vehículos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga a lo menos 2 años o 4 años?

Años	Frecuencia
1	3
2	4
3	2
4	2
5	1

A) $\frac{5}{12}$

B) $\frac{6}{12}$

C) $\frac{9}{12}$

D) $\frac{11}{12}$

5. Una profesora indica a sus estudiantes que en una caja hay una cierta cantidad de bolitas negras y rojas, todas del mismo tipo y pide a cuatro de ellos que le indiquen qué información se necesita conocer para determinar cuál es la probabilidad de que al sacar una bolita de esta caja, esta sea de color rojo.

- **Mariela** dice que bastaría con saber la diferencia entre la cantidad de bolitas de distinto color.
- **Andrés** dice que es suficiente conocer el total de bolitas que hay en la caja.
- **Manuel** dice que es suficiente conocer el porcentaje de bolitas rojas que hay en la caja.
- **Sara** dice que bastaría con conocer la cantidad de bolitas rojas que hay en la caja.

¿Cuál de los estudiantes está en lo correcto?

A) Mariela
B) Andrés
C) Manuel
D) Sara

6. En una caja se tienen diez bolitas numeradas del 0 al 9. Si se extraen dos con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que las bolitas extraídas sean impares e iguales?

A) $\frac{1}{10}$

B) $\frac{5}{81}$

C) $\frac{2}{9}$

D) $\frac{1}{20}$

7. La probabilidad de que un evento ocurra es p, y la ocurrencia del evento es independiente de lo que haya ocurrido anteriormente. ¿Cuál es la probabilidad de que **no** ocurra en dos intentos seguidos?

A) $1 - p^2$
B) $(1 - p)^2$
C) $1 + p^2$
D) p^2

8. En un cierto experimento, la probabilidad de que ocurra el suceso A es p y la probabilidad de que ocurra el suceso B es q. Si los sucesos son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra B o no ocurra A?

A) $q(1 - p)$
B) $q + (1 - p)$
C) $q + (1 - p) - q(1 - p)$
D) $1 - pq$

9. En una tómbola hay 15 bolitas negras y 15 rojas, cada color numeradas del 1 al 15, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir una bolita salga el número 13 o salga de color negro?

A) $\frac{14}{30}$

B) $\frac{15}{30}$

C) $\frac{16}{30}$

D) $\frac{17}{30}$

10. La distribución por sexo en los dos cursos de primero medio de un colegio, se muestra en la siguiente tabla:

	hombres	mujeres
1° A	20	10
1° B	18	12

Si de estos alumnos(as) se elige un(a) alumno(a) al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que sea mujer es $\frac{22}{60}$.

B) La probabilidad de que sea del 1ºA es $\frac{1}{2}$.

C) La probabilidad de que sea un estudiante varón del 1ºB es $\frac{18}{30}$.

D) La probabilidad de que sea un estudiante varón o del 1ºA es $\frac{4}{5}$.

11. Juan y Andrés juegan lanzando 4 dados, y gana aquél que consiga que solo tres dados marquen un número par, ¿cuál es la probabilidad de ganar en este juego?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{16}$

12. Se tienen dos cajas con bolitas negras y blancas. La primera tiene 3 blancas y 4 negras y la segunda dos blancas y 6 negras. Si se elige una bolita de cada caja (cada caja tiene la misma probabilidad de ser elegida), ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una de las bolitas sea negra?

A) $\frac{3}{7}$

B) $\frac{25}{28}$

C) $\frac{19}{28}$

D) $\frac{3}{28}$

13. En una caja hay solo bolitas de colores verdes, rojas y blancas todas del mismo tipo. Se sabe que la probabilidad de sacar una blanca es 0,4 y la probabilidad de sacar una bolita verde es el doble de la probabilidad de sacar una bolita roja, ¿cuál de las siguiente afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de elegir una bolita roja es 0,2.
B) La probabilidad de elegir una bolita blanca es el doble de la probabilidad de elegir una bolita roja.
C) En la caja hay tantas bolitas verdes como blancas.
D) Sacar una bolita verde o una blanca tiene el doble de probabilidad de sacar una bolita roja.

14. Las edades de siete primos medidas en números enteros, fluctúan entre los 16 a los 21 años, ambas edades incluídas, donde la moda es 21 y por cada edad hay al menos un primo. Si se escoge al azar uno de estos primos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La probabilidad de que tenga menos de 18 años es igual a la probabilidad de que tenga más de 19 años.
B) La probabilidad de que tenga 16 o 17 años es igual a la probabilidad de que tenga 21 años.
C) La probabilidad de que tenga un número par de años es igual a la probabilidad de que tenga un número impar de años.
D) La probabilidad de que tenga menos de 18 años es igual a la probabilidad de que tenga a lo menos 20 años.

15. En un concurso de TV, en una urna hay 12 bolitas del mismo tipo, 3 blancas, 4 verdes, 3 azules y 2 rojas. El concursante debe sacar 3 bolitas una tras otra, sin reposición y gana el premio mayor si saca dos bolitas blancas y una roja, ¿cuál es la probabilidad de ganar?

A) $\frac{1}{110}$

B) $\frac{3}{110}$

C) $\frac{2}{110}$

D) $\frac{1}{48}$

16

16. Se ha lanzado un dado dos veces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que la suma sea 8 es $\frac{5}{36}$.

B) La probabilidad de que las dos veces salga el mismo número es $\frac{1}{6}$.

C) La probabilidad de que uno de los números obtenidos sea el doble del otro es $\frac{1}{6}$.

D) La probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea par es $\frac{1}{4}$.

17. Se lanzan dos dados y se suman los números obtenidos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que la suma sea 5 es igual a la probabilidad de que la suma sea 9.

B) 7 es la suma con mayor probabilidad.

C) La probabilidad de que la suma sea a lo menos 7 es $\frac{7}{12}$.

D) La probabilidad de que la suma sea a lo menos 6 es $\frac{1}{2}$.

18. En una caja hay 4 bolitas blancas y 2 negras y en otra hay 4 bolitas blancas y 6 negras. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos del mismo color ? (las cajas tienen la misma probabilidad de ser elegidas)

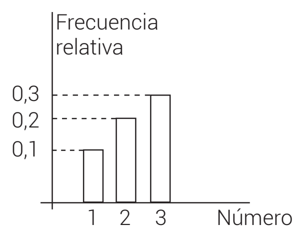
A) $\frac{4}{15}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{8}{15}$

19. En una caja hay bolitas con los números marcados del 1 al 4. En el siguiente gráfico se muestra la frecuencia relativa de algunos de estos números, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La probabilidad de sacar un 1 o un 4 es 50%.
B) La probabilidad de sacar un impar tiene la misma probabilidad que sacar un 4.
C) La probabilidad de sacar un par o un divisor de 2 es 0,9.
D) La probabilidad de sacar un 1 o un 4 es igual a la probabilidad de sacar un 2 o un 3.

20. Dos amigas, Laura y Renata tienen en sus carteras monedas de \$50 de \$100 y de \$500.
En la siguiente tabla se muestra la probabilidad de sacar una moneda de un cierto tipo en sus respectivas carteras:

	\$ 50	**\$ 100**	**\$ 500**
Laura	0,3	0,5	0,2
Renata	0,15	0,25	0,6

Si cada una saca una moneda, para dar una propina, ¿cuál es la probabilidad de que entre ambas den una propina de a lo menos \$ 600?

A) $0{,}2 \cdot 0{,}6$
B) $0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}25$
C) $(0{,}5 \cdot 0{,}6) + (0{,}2 \cdot 0{,}25) + (0{,}2 \cdot 0{,}6)$
D) $(0{,}5 + 0{,}6) \cdot (0{,}2 + 0{,}25) \cdot (0{,}2 + 0{,}6)$

21. En una caja hay 3 bolitas blancas y 2 rojas, en otra caja hay 2 blancas y 4 rojas. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es probabilidad de que sean del mismo color?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{4}{15}$
C) $\frac{7}{15}$
D) $\frac{8}{15}$

22. Un dado cargado es tal que la probabilidad de que salga un número par y múltiplo de tres es 0,1, que salga un impar y divisor de seis es 0,2 y que salga un número par y divisor de 12 es 0,6, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 5?

A) 0,1
B) 0,2
C) 0,3
D) 0,4

23. Un portal de ventas de automóviles de internet ofrece 200 vehículos entre camionetas y autos, de los cuales hay nuevos y usados. Se sabe que, los autos nuevos son 40, el total de camionetas 98 y los vehículos usados corresponden al 55%. Si se elige un vehículo al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** ?

A) La probabilidad de que sea una camioneta nueva es 0,25.
B) La probabilidad de que sea una camioneta usada es 0,24.
C) La probabilidad de que sea un auto o un vehículo nuevo es 0,96.
D) La probabilidad de que sea un auto nuevo es 0,2.

24. En una tienda de ropa quedan poleras de la temporada de verano pasado y desean ponerlas en liquidación, se sabe que quedan solo de colores verde y rojo, de tallas M y S. Al hacer el inventario notan que $\frac{1}{3}$ son verdes y de estas $\frac{4}{5}$ son M, mientras que de las rojas, $\frac{2}{3}$ son M, si se colocan todas estas poleras en liquidación y un cliente saca una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que elija una de talla S?

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{7}{15}$

C) $\frac{8}{15}$

D) $\frac{13}{45}$

25. Se tienen dos urnas, cada una con bolitas numeradas con números enteros positivos, de modo que en la primera urna la probabilidad de extraer una bolita marcada con un número par es un 0,8 y la probabilidad de sacar una bolita numerada con un número impar en la segunda urna es 0,6. Si se saca una bolita de cada urna y se suman los números que aparecen en ellas, ¿cuál es la probabilidad que esta suma sea un numero par?

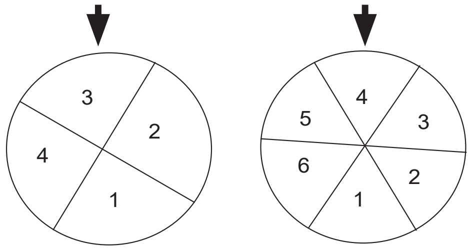
A) $0,8 \cdot 0,4$

B) $(0,8 \cdot 0,4) + (0,2 \cdot 0,6)$

C) $(0,8 \cdot 0,6) + (0,2 \cdot 0,4)$

D) $(0,8 + 0,4) \cdot (0,2 + 0,6)$

26. Las ruletas de las figuras tienen sus sectores circulares respectivos congruentes.



Si se lanzan las dos ruletas y se suman los números obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de que esta suma sea a lo sumo 3 o mayor que 8?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{7}{24}$

27. Se lanza una moneda 4 veces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

A) La probabilidad de que salgan a lo menos 2 caras es $\frac{11}{16}$.

B) La probabilidad de que salgan a lo más 3 sellos es $\frac{15}{16}$.

C) La probabilidad de que salgan tantas caras como sellos es $\frac{3}{8}$.

D) La probabilidad de que salgan menos de 2 sellos es igual a la probabilidad de que salgan a lo más 2 caras.

28. Un jardín infantil tiene 43 bebés en sala cuna, de los cuales 23 son de sexo femenino.
Si 9 de los bebés se enfermaron en el invierno pasado, de los cuales 4 eran niñitos, ¿cuál es la probabilidad de que si elige un bebé al azar este sea de sexo femenino o se enfermó en invierno?

A) $\frac{32}{43}$

B) $\frac{27}{43}$

C) $\frac{9}{43} \cdot \frac{27}{43}$

D) $\frac{1}{43}$

29. En una caja hay bolitas rojas, verdes y amarillas. Si se saca una bolita al azar, se sabe que la probabilidad de sacar una que no sea amarilla es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de sacar una roja o amarilla es $\frac{4}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{8}{15}$

30. En una tómbola hay bolitas marcadas con números enteros positivos, se sabe que hay 8 bolitas amarillas y 12 rojas, de las amarillas hay 5 marcadas con números impares y de las rojas hay 4 marcadas con números pares. Si se elige una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea amarilla o par?

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{20}$

D) $\frac{3}{5}$

31. Un plantel de fútbol está formado por 3 arqueros, 6 defensas, 8 mediocampistas y 4 delanteros. Si se eligen dos jugadores al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** ?

A) La probabilidad de que los dos sean delanteros es $\frac{1}{35}$.

B) La probabilidad de que uno sea delantero y el otro arquero es $\frac{1}{35}$.

C) La probabilidad de que ninguno sea defensa es $\frac{1}{2}$.

D) La probabilidad de que ninguno sea arquero o defensa es $\frac{11}{35}$.

32. Una moneda está cargada de tal forma que es cuatro veces más probable que se obtenga una cara que un sello. Si la moneda se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de **NO** obtener dos caras?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{25}$

C) $\frac{8}{25}$

D) $\frac{9}{25}$

33. En un comedor hay 4 ampolletas, las cuales pueden estar encendidas o apagadas independientemente unas de otras y para cada ampolleta la probabilidad de estar prendida es igual a la probabilidad de estar apagada.
Si un niño juega con las 4 luces prendiéndolas y apagándolas, ¿cuál es la probabilidad de que queden dos encendidas y dos apagadas?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{3}{4}$

34. Se lanzan dos dados y una moneda, ¿cuál es probabilidad de que en la moneda salga sello y que los dados sumen 6?

A) $\frac{1}{18}$

B) $\frac{1}{24}$

C) $\frac{7}{12}$

D) $\frac{5}{72}$

35. En un colegio los estudiantes deben elegir entre los talleres de Voleybol y Fútbol, pudiendo elegir cualquiera de ellos, ambos o ninguno. Se sabe que si se elige uno de los estudiantes al azar, la probabilidad de que no haya elegido estos talleres es 0,1, la probabilidad de que haya elegido voleybol es 0,42 y la probabilidad de que haya elegido ambos talleres es 0,12, ¿cuál es la probabilidad de que este estudiante haya elegido fútbol y no voleybol ?

A) 0,36
B) 0,48
C) 0,58
D) 0,60

36. Una moneda está cargada de modo que la probabilidad de que salga cara es 0,6, si se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y un sello?

A) 0,24
B) 0,48
C) 0,5
D) 0,52

37. En una industria hay dos máquinas A y B, del total de artículos producidos, los $\frac{2}{3}$ provienen de la máquina A, de lo fabricados por esta máquina, $\frac{1}{10}$ están fallados, mientras que de los fabricados por B, $\frac{4}{5}$ no están fallados.

De los artículos producidos por estas máquinas, se elige uno al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que lo haya fabricado B y no esté fallado es $\frac{4}{15}$.

B) La probabilidad de que haya sido fabricado por A y esté fallado es igual a la probabilidad de que haya sido producido por B y esté fallado.

C) La probabilidad de que sea producido por A y no esté fallado es $\frac{3}{5}$.

D) La probabilidad de elegir un artículo fallado es $\frac{3}{10}$.

38. La probabilidad de que salga cara en una moneda cargada es el triple de que caiga en sello.
Si se lanza la moneda 800 veces, por la Ley de los Grandes Números, la cantidad de caras que deberían salir es cercano a

A) 200
B) 300
C) 400
D) 600

39. Se toma un test de 4 preguntas de verdadero o falso a 1.600 personas y cada una de ellas las contesta al azar. La Ley de los Grandes Números permite afirmar que

A) en un grupo de 400 personas, hay 100 que tienen 3 buenas.
B) en un grupo de 500 personas hay aproximadamente 100 obtienen 2 preguntas buenas.
C) aproximadamente, el 25% obtuvo una pregunta buena.
D) aproximadamente, un 40% obtuvo más de 2 preguntas buenas.

40. Se lanzan 12.000 veces dos dados no cargados, entonces según la Ley de los Grandes Números, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) 1000 veces la suma saldrá un 4.
B) aproximadamente, 6.000 veces la suma será a lo sumo igual a 6.
C) aproximadamente, 2.000 veces la suma será a lo menos 10.
D) por cada 1200 veces, 200 veces la suma será un 7.

41. Se tienen dos cajas, cada una con bolitas numeradas del 1 al 4. En las siguientes tablas aparecen las probabilidades de elegir cada una de las bolitas en cada una de las cajas:

Caja 1	
número	**probabilidad**
1	0,2
2	0,1
3	0,3
4	0,4

Caja 2	
número	**probabilidad**
1	0,3
2	0.25
3	0,45
4	0,1

Si se elige una bolita de cada, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que sumen 2 es 0,5.
B) La probabilidad de que sumen 3 es 0,08.
C) La probabilidad de que sumen 4 es superior al 20%.
D) La probabilidad de que sumen más que 7 es un 4%.

42. En la tabla adjunta se muestra la distribución por color de las bolitas que se encuentran en una caja. Si los colores que aparecen en la tabla son los únicos que tienen las bolitas y estas son de igual tamaño y tienen un solo color, ¿cuál es la probabilidad de elegir una bolita que sea roja o blanca?

color	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
rojo			0,10
verde	3		0,15
azul		12	
blanco			

A) 0,2
B) 0,24
C) 0,25
D) 0,5

43. Se tienen dos tómbolas con bolitas numeradas, en las siguientes tablas se muestran los números que hay en las tómbolas y la cantidad de bolitas que tienen marcado ese número:

Tómbola 1	
número	Cantidad de bolitas
-1	10
-2	15
3	25

Tómbola 2	
número	Cantidad de bolitas
-2	25
3	15
4	10

Si se saca una bolita de la tómbola 1 y posteriormente una de la tómbola 2 y después se multiplican los números obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea positivo?

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{5}$

44. En una pequeña empresa hay 20 funcionarios que se dividen en administrativos y vendedores. Se sabe que el total de vendedores es 12 y hay 6 mujeres de las cuales hay 2 administrativas, si se elige una persona al azar de esta empresa, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que sea una mujer vendedora es 0,2.
B) La probabilidad de que sea un administrativo de cualquier sexo o de sexo femenino es 0,7.
C) La probabilidad de elegir un administrativo de cualquier sexo es 0,4.
D) La probabilidad de elegir un vendedor de sexo masculino es 0,4.

45. En dos cajas hay tarjetas de colores: negras, verdes y rojas, en las tablas que aparecen a continuación se muestra la probabilidad de elegir cada color en cada una de las cajas:

Caja 1	
Color	Probabilidad
Negra	0,2
Roja	0,5
Verde	0,3

Caja 2	
Color	Probabilidad
Negra	0,1
Roja	0,6
Verde	0,3

Si se saca una tarjeta de cada caja, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que sean del mismo color es 0,41.
B) La probabilidad de sacar una roja y una verde es 0,33.
C) La probabilidad de que las dos no sean negras es 0,72.
D) La probabilidad de que al menos una sea verde es 0,72.

46. En un consultorio de una cierta comuna el mes pasado se atiendieron 200 bebés de los cuales 80 eran de sexo masculino. Si se elige un bebé varón, la probabilidad de que esté infectado con una gripe estacional es 0,2, mientras que de los de sexo femenino la probabilidad de que no esté infectado de una gripe estacional es 0,85, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) 42 bebés están infectados con gripe estacional.

B) 40 bebés son de sexo masculino y están infectados con gripe estacional.

C) 166 bebés no están infectados con gripe estacional.

D) 177 bebés son de sexo femenino y no están infectados con gripe estacional.

47. En una oficina trabajan 8 hombres y 6 mujeres. Si se va a elegir una comisión formada por tres integrantes, ¿cuál es la probabilidad de que esté integrada por 2 hombres y una mujer?

A) $\frac{2}{13}$

B) $\frac{6}{13}$

C) $\frac{8}{13}$

D) $\frac{12}{343}$

48. En una caja hay 10 bolitas numeradas del 1 al 10. Si se elige una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea par o sea un divisor de 6?

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{7}{10}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{9}{10}$

49. Una moneda está cargada de modo que la probabilidad de que salga sello es el doble de la probabilidad de que salga cara. Si se lanza la moneda 2 veces, ¿cuál es la probabilidad de que no salgan dos sellos?

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{8}{9}$

50. Una moneda está cargada de modo que la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga sello. Si se lanza la moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que salgan 2 caras y 1 sello?

A) $\frac{4}{27}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{2}{27}$

D) $\frac{2}{9}$

51. Los estudiantes de primero medio de un colegio pueden optar a un taller de teatro o uno de danza. Si se elige un(a) alumno(a) de este curso, la probabilidad de que haya elegido el taller de teatro es de un 50%, la probabilidad de que haya elegido el taller de danza es un 40% y la probabilidad de que no haya elegido ninguno de estos talleres es de un 20%, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido solo el taller de teatro?

A) 0,2
B) 0,3
C) 0,4
D) 0,5

52. Se lanza un dado común tres veces, ¿cuál es la probabilidad que en los dos primeros lanzamientos salga el mismo número y en el tercero salga un número distinto?

A) $\frac{5}{6}$

B) $\frac{5}{18}$

C) $\frac{5}{36}$

D) $\frac{5}{216}$

53. Se tienen dos dados cargados, de colores blanco y negro, de modo que la probabilidad de que en el blanco salga par es de un 60% y la probabilidad de que salga impar en el dado negro es de un 30%. Si se lanzan los dados simultáneamente y se suman los números obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de que esta suma sea un número par?

A) 0,12
B) 0,42
C) 0,54
D) 0,56

54. Durante la semana pasada, en una sala de un hospital, la probabilidad de que un paciente haya presentado fiebre es 0,15 y la probabilidad de que haya presentado la presión alta es 0,2. Si la probabilidad de que haya presentado los dos síntomas es 0,1, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente haya presentado fiebre o presión alta, pero no ambos síntomas?

A) 0,05
B) 0,15
C) 0,20
D) 0,25

55. Un curso tiene 30 alumnos, en la siguiente tabla se muestra la distribución de ausencias que hubo en este curso durante el primer semestre:

Número de ausencias	**Número de alumnos**
[0 , 2[	12
[2 , 4[	8
[4 , 6[	4
[6 , 8]	3

Si se elige un estudiante de este curso al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que haya tenido 2 o 3 ausencias es $\frac{4}{15}$.
B) La probabilidad de que haya tenido menos de 4 ausencias es $\frac{2}{3}$.
C) La probabilidad de que haya tenido a lo menos 4 ausencias es $\frac{7}{30}$.
D) La probabilidad de que haya tenido más de 8 ausencias es $\frac{1}{10}$.

56. En una caja hay a bolitas blancas y b negras, mientras que en una segunda caja hay b bolitas blancas y a negras. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si se saca una bolita de cada caja, la probabilidad de sacar una bolita blanca en una caja es igual a la probabilidad de sacar una negra de la otra.
B) Si se saca una bolita de cada caja, la probabilidad de sacar dos blancas es igual a la probabilidad de sacar dos negras.
C) Si se juntan todas las bolitas en una sola caja, la probabilidad de sacar una bolita negra es igual a la probabilidad de sacar una blanca.
D) Si se saca una bolita de cada caja, la probabilidad de sacar dos bolitas de igual color es $\frac{ab}{(a+b)^2}$.

16

57. Se tienen dos dados cargados de seis caras, en las siguientes tablas se muestran las probabilidades de cada número en cada uno de ellos:

Dado 1	
Número	**Probabilidad**
1	0,30
2	0,10
3	0,15
4	0,25
5	0,15
6	0,05

Dado 2	
Número	**Probabilidad**
1	0,20
2	0,05
3	0,15
4	0,10
5	0,30
6	0,20

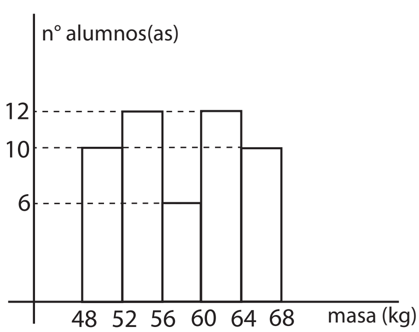
Si se lanzan los dos dados, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que sumen menos de 12 es un 99%.
B) La probabilidad de que sumen 11 es inferior al 5%.
C) La probabilidad de que sumen a lo sumo 3 es inferior al 10%.
D) La probabilidad de que sumen 2 es un 50%.

58. En un consultorio, en un cierto día se han atendido 20 bebés, 12 son de sexo masculino de los cuales 8 estaban infectados del virus sincicial y de las de sexo femenino, 5 no se habían contagiado con este virus. Si se elige uno de los bebés atendidos al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **FALSA**?

A) La probabilidad de que no esté infectado con el virus sincicial es de un 45%.
B) Si se elige un bebé de sexo masculino, la probabilidad de que esté contagiado con el virus sincicial es $\frac{2}{3}$.
C) Si se elige un bebé de sexo femenino, la probabilidad de que no esté contagiado es un 62,5%.
D) Si se elige un bebé contagiado, la probabilidad de que sea de sexo femenino es superior al 40%.

59. Para un estudio de la obesidad de los alumnos de un establecimiento, se ha medido la masa de 50 estudiantes, obteniéndose la distribución que se muestra en el siguiente histograma, donde los intervalos son de la forma [a , b[y el último de la forma [a , b].



Si se elige un(a) alumno(a) al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que tenga una masa inferior a 56 kg es de un 44%.
B) La probabilidad de que tenga una masa de a lo menos 60 kg es de un 44%.
C) La probabilidad de que tenga una masa superior a 52 kg es de un 80%.
D) La probabilidad de que tenga una masa de a lo menos 56 kg e inferior a 64 kg es de un 36%.

60. En un cierto curso, llegan colaciones que vienen en bolsas del tipo A y B. Las del tipo A tienen 2 chocolates y 3 frutas y las del tipo B tienen 3 chocolates y 2 frutas. Si en total se tienen 15 bolsas del tipo A y 25 del tipo B y un estudiante elige una bolsa al azar y de ella elige uno de los objetos de su interior al azar, los cuales tienen la misma probabilidad de ser elegidos ¿cuál es la probabilidad de que elija un chocolate?

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{3}{20}$

C) $\frac{21}{40}$

D) $\frac{9}{160}$

RESPUESTAS CAPÍTULOS

RESPUESTAS CAPÍTULO 1 PORCENTAJE									
1. B	**2.** B	**3.** D	**4.** C	**5.** B	**6.** B	**7.** A	**8.** C	**9.** B	**10.** B
11. B	**12.** A	**13.** C	**14.** B	**15.** C	**16.** B	**17.** D	**18.** D	**19.** C	**20.** A
21. B	**22.** B	**23.** D	**24.** D	**25.** B	**26.** C	**27.** D	**28.** C	**29.** C	**30.** C
31. C	**32.** D	**33.** B	**34.** D	**35.** D	**36.** B	**37.** C	**38.** C	**39.** D	**40.** B
41. D	**42.** B	**43.** B	**44.** D	**45.** C	**46.** D	**47.** C	**48.** D	**49.** D	**50.** C
51. C	**52.** B	**53.** A	**54.** C	**55.** C	**56.** C	**57.** A	**58.** C	**59.** D	**60.** A

RESPUESTAS CAPÍTULO 2 NÚMEROS RACIONALES									
1. B	**2.** D	**3.** B	**4.** C	**5.** C	**6.** A	**7.** D	**8.** B	**9.** C	**10.** C
11. C	**12.** A	**13.** D	**14.** C	**15.** C	**16.** D	**17.** C	**18.** C	**19.** B	**20.** C
21. C	**22.** B	**23.** D	**24.** B	**25.** D	**26.** C	**27.** C	**28.** B	**29.** C	**30.** C
31. D	**32.** C	**33.** D	**34.** D	**35.** A	**36.** B	**37.** A	**38.** D	**39.** B	**40.** C
41. D	**42.** B	**43.** B	**44.** D	**45.** D	**46.** D	**47.** D	**48.** B	**49.** C	**50.** C
51. D	**52.** B	**53.** C	**54.** D	**55.** D	**56.** D	**57.** B	**58.** D	**59.** C	**60.** D

RESPUESTAS CAPÍTULO 3 POTENCIAS Y RAÍCES									
1. A	**2.** D	**3.** D	**4.** C	**5.** B	**6.** D	**7.** B	**8.** C	**9.** C	**10.** D
11. D	**12.** C	**13.** C	**14.** D	**15.** B	**16.** B	**17.** C	**18.** C	**19.** C	**20.** B
21. C	**22.** B	**23.** D	**24.** A	**25.** A	**26.** A	**27.** B	**28.** C	**29.** D	**30.** A
31. A	**32.** D	**33.** A	**34.** D	**35.** C	**36.** A	**37.** C	**38.** D	**39.** D	**40.** A
41. B	**42.** D	**43.** A	**44.** A	**45.** C	**46.** B	**47.** A	**48.** D	**49.** C	**50.** B
51. D	**52.** D	**53.** C	**54.** D	**55.** C	**56.** B	**57.** C	**58.** A	**59.** D	**60.** C

RESPUESTAS CAPÍTULO 4 OPERATORIA ALGEBRAICA									
1. D	**2.** C	**3.** A	**4.** C	**5.** C	**6.** C	**7.** A	**8.** D	**9.** C	**10.** C
11. C	**12.** A	**13.** B	**14.** B	**15.** D	**16.** C	**17.** A	**18.** D	**19.** C	**20.** C
21. D	**22.** B	**23.** C	**24.** C	**25.** D	**26.** D	**27.** B	**28.** B	**29.** C	**30.** D
31. C	**32.** B	**33.** C	**34.** D	**35.** C	**36.** C	**37.** B	**38.** D	**39.** A	**40.** D
41. B	**42.** D	**43.** B	**44.** A	**45.** C	**46.** A	**47.** B	**48.** C	**49.** C	**50.** B
51. D	**52.** B	**53.** D	**54.** C	**55.** B	**56.** D	**57.** D	**58.** A	**59.** C	**60.** C

RESPUESTAS CAPÍTULO 5 PLANTEO DE PROBLEMAS									
1. B	**2.** D	**3.** B	**4.** C	**5.** B	**6.** D	**7.** C	**8.** A	**9.** D	**10.** C
11. D	**12.** C	**13.** D	**14.** D	**15.** A	**16.** B	**17.** C	**18.** A	**19.** D	**20.** B
21. B	**22.** C	**23.** D	**24.** B	**25.** D	**26.** D	**27.** B	**28.** B	**29.** D	**30.** B
31. C	**32.** C	**33.** D	**34.** B	**35.** C	**36.** D	**37.** C	**38.** D	**39.** C	**40.** A
41. C	**42.** C	**43.** D	**44.** D	**45.** C	**46.** C	**47.** B	**48.** B	**49.** D	**50.** D
51. C	**52.** D	**53.** D	**54.** B	**55.** C	**56.** C	**57.** D	**58.** B	**59.** C	**60.** B

Editorial CID

RESPUESTAS CAPÍTULO 6 DESIGUALDADES E INECUACIONES									
1. C	**2.** A	**3.** C	**4.** D	**5.** A	**6.** B	**7.** C	**8.** D	**9.** C	**10.** B
11. B	**12.** B	**13.** C	**14.** D	**15.** A	**16.** D	**17.** D	**18.** C	**19.** B	**20.** D
21. B	**22.** B	**23.** D	**24.** D	**25.** C	**26.** D	**27.** C	**28.** A	**29.** D	**30.** B
31. A	**32.** C	**33.** C	**34.** C	**35.** C	**36.** C	**37.** D	**38.** B	**39.** B	**40.** C
41. C	**42.** D	**43.** C	**44.** D	**45.** B	**46.** C	**47.** D	**48.** A	**49.** B	**50.** D
51. B	**52.** B	**53.** A	**54.** B	**55.** C	**56.** B	**57.** C	**58.** D	**59.** C	**60.** D

RESPUESTAS CAPÍTULO 7 ECUACIÓN CUADRÁTICA									
1. B	**2.** D	**3.** C	**4.** D	**5.** C	**6.** C	**7.** D	**8.** D	**9.** D	**10.** A
11. C	**12.** B	**13.** D	**14.** D	**15.** B	**16.** D	**17.** A	**18.** C	**19.** C	**20.** D
21. B	**22.** C	**23.** D	**24.** C	**25.** C	**26.** C	**27.** C	**28.** D	**29.** C	**30.** C
31. C	**32.** D	**33.** B	**34.** B	**35.** B	**36.** C	**37.** D	**38.** A	**39.** B	**40.** D
41. C	**42.** C	**43.** C	**44.** C	**45.** D	**46.** C	**47.** C	**48.** C	**49.** C	**50.** B
51. B	**52.** D	**53.** D	**54.** D	**55.** C	**56.** D	**57.** B	**58.** D	**59.** D	**60.** A

RESPUESTAS CAPÍTULO 8 PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA									
1. C	**2.** B	**3.** D	**4.** C	**5.** B	**6.** C	**7.** B	**8.** C	**9.** B	**10.** D
11. B	**12.** D	**13.** D	**14.** C	**15.** D	**16.** D	**17.** B	**18.** A	**19.** B	**20.** D
21. D	**22.** C	**23.** B	**24.** D	**25.** C	**26.** D	**27.** C	**28.** D	**29.** B	**30.** D
31. B	**32.** A	**33.** D	**34.** D	**35.** A	**36.** C	**37.** B	**38.** D	**39.** D	**40.** B
41. D	**42.** C	**43.** B	**44.** C	**45.** C	**46.** C	**47.** B	**48.** C	**49.** D	**50.** B
51. C	**52.** D	**53.** B	**54.** C	**55.** C	**56.** C	**57.** C	**58.** B	**59.** D	**60.** B

RESPUESTAS CAPÍTULO 9 FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN									
1. B	**2.** A	**3.** C	**4.** D	**5.** C	**6.** C	**7.** C	**8.** D	**9.** C	**10.** A
11. C	**12.** B	**13.** B	**14.** D	**15.** B	**16.** C	**17.** C	**18.** D	**19.** C	**20.** C
21. C	**22.** D	**23.** D	**24.** D	**25.** C	**26.** D	**27.** B	**28.** B	**29.** B	**30.** C
31. C	**32.** C	**33.** B	**34.** C	**35.** D	**36.** C	**37.** B	**38.** C	**39.** B	**40.** D
41. C	**42.** D	**43.** D	**44.** C	**45.** B	**46.** C	**47.** B	**48.** D	**49.** D	**50.** C
51. D	**52.** C	**53.** A	**54.** C	**55.** C	**56.** C	**57.** D	**58.** D	**59.** C	**60.** B

RESPUESTAS CAPÍTULO 10 FUNCIÓN CUADRÁTICA									
1. C	**2.** C	**3.** B	**4.** D	**5.** C	**6.** B	**7.** B	**8.** C	**9.** B	**10.** D
11. A	**12.** D	**13.** C	**14.** D	**15.** B	**16.** B	**17.** B	**18.** D	**19.** C	**20.** D
21. D	**22.** B	**23.** B	**24.** C	**25.** D	**26.** A	**27.** C	**28.** D	**29.** A	**30.** C
31. C	**32.** D	**33.** A	**34.** C	**35.** D	**36.** D	**37.** B	**38.** B	**39.** C	**40.** C
41. C	**42.** D	**43.** C	**44.** A	**45.** C	**46.** B	**47.** C	**48.** C	**49.** C	**50.** C
51. D	**52.** C	**53.** C	**54.** C	**55.** D	**56.** A	**57.** B	**58.** B	**59.** D	**60.** D

RESPUESTAS CAPÍTULO 11 ÁREAS, PERÍMETROS Y TEOREMA DE PITÁGORAS									
1. B	**2.** C	**3.** C	**4.** C	**5.** C	**6.** C	**7.** D	**8.** C	**9.** B	**10.** B
11. B	**12.** B	**13.** D	**14.** C	**15.** B	**16.** C	**17.** C	**18.** B	**19.** A	**20.** D
21. C	**22.** B	**23.** C	**24.** C	**25.** B	**26.** C	**27.** C	**28.** A	**29.** C	**30.** D
31. D	**32.** B	**33.** C	**34.** B	**35.** B	**36.** B	**37.** A	**38.** A	**39.** A	**40.** B
41. A	**42.** B	**43.** B	**44.** B	**45.** D	**46.** C	**47.** A	**48.** B	**49.** A	**50.** B
51. C	**52.** D	**53.** C	**54.** B	**55.** B	**56.** C	**57.** C	**58.** C	**59.** B	**60.** B

RESPUESTAS CAPÍTULO 12 VECTORES EN EL PLANO Y TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS									
1. B	**2.** D	**3.** C	**4.** C	**5.** D	**6.** D	**7.** C	**8.** D	**9.** D	**10.** D
11. C	**12.** D	**13.** D	**14.** C	**15.** B	**16.** C	**17.** D	**18.** D	**19.** D	**20.** C
21. C	**22.** D	**23.** C	**24.** C	**25.** D	**26.** D	**27.** D	**28.** C	**29.** D	**30.** C
31. A	**32.** D	**33.** B	**34.** D	**35.** D	**36.** C	**37.** C	**38.** C	**39.** D	**40.** D
41. D	**42.** D	**43.** D	**44.** C	**45.** D	**46.** B	**47.** B	**48.** C	**49.** C	**50.** D
51. C	**52.** C	**53.** D	**54.** C	**55.** A	**56.** D	**57.** D	**58.** B	**59.** C	**60.** D

RESPUESTAS CAPÍTULO 13 GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN									
1. C	**2.** C	**3.** B	**4.** A	**5.** C	**6.** D	**7.** A	**8.** C	**9.** D	**10.** C
11. C	**12.** D	**13.** D	**14.** B	**15.** D	**16.** B	**17.** B	**18.** D	**19.** B	**20.** D
21. B	**22.** A	**23.** C	**24.** D	**25.** B	**26.** D	**27.** D	**28.** A	**29.** C	**30.** C
31. C	**32.** D	**33.** C	**34.** C	**35.** C	**36.** C	**37.** C	**38.** B	**39.** C	**40.** B
41. A	**42.** D	**43.** D	**44.** C	**45.** B	**46.** D	**47.** B	**48.** C	**49.** C	**50.** A
51. D	**52.** D	**53.** B	**54.** C	**55.** D	**56.** D	**57.** B	**58.** C	**59.** D	**60.** D

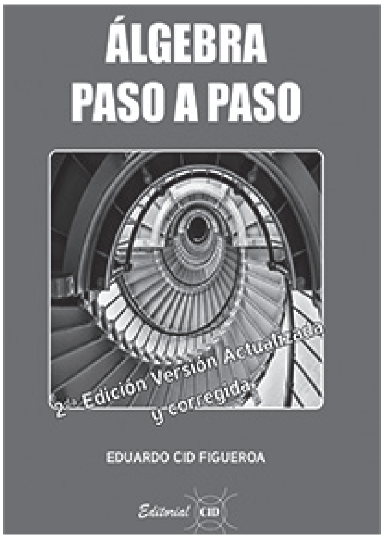
RESPUESTAS CAPÍTULO 14 CUERPOS GEOMÉTRICOS									
1. A	**2.** C	**3.** C	**4.** C	**5.** B	**6.** B	**7.** C	**8.** B	**9.** D	**10.** B
11. C	**12.** B	**13.** C	**14.** D	**15.** B	**16.** B	**17.** C	**18.** C	**19.** A	**20.** A
21. C	**22.** A	**23.** D	**24.** D	**25.** D	**26.** D	**27.** B	**28.** D	**29.** D	**30.** A
31. C	**32.** C	**33.** B	**34.** C	**35.** B	**36.** C	**37.** B	**38.** B	**39.** D	**40.** B
41. B	**42.** C	**43.** C	**44.** D	**45.** B	**46.** C	**47.** C	**48.** D	**49.** C	**50.** C
51. C	**52.** B	**53.** D	**54.** D	**55.** C	**56.** C	**57.** C	**58.** C	**59.** C	**60.** D

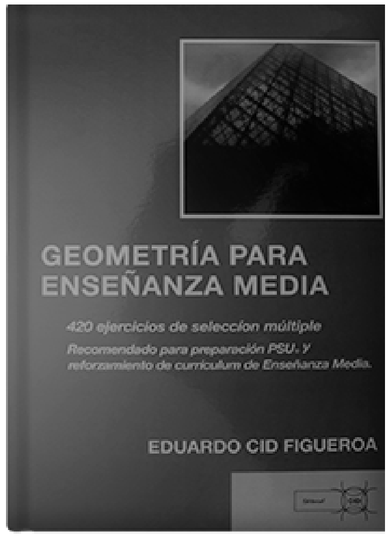
RESPUESTAS CAPÍTULO 15 ESTADÍSTICA									
1. C	**2.** C	**3.** D	**4.** D	**5.** C	**6.** C	**7.** D	**8.** C	**9.** B	**10.** D
11. B	**12.** D	**13.** B	**14.** C	**15.** C	**16.** D	**17.** C	**18.** D	**19.** D	**20.** C
21. C	**22.** D	**23.** D	**24.** C	**25.** D	**26.** C	**27.** C	**28.** D	**29.** D	**30.** C
31. D	**32.** D	**33.** D	**34.** D	**35.** B	**36.** C	**37.** C	**38.** D	**39.** C	**40.** B
41. C	**42.** B	**43.** D	**44.** C	**45.** B	**46.** C	**47.** B	**48.** C	**49.** D	**50.** B
51. B	**52.** D	**53.** D	**54.** C	**55.** B	**56.** B	**57.** C	**58.** D	**59.** D	**60.** C

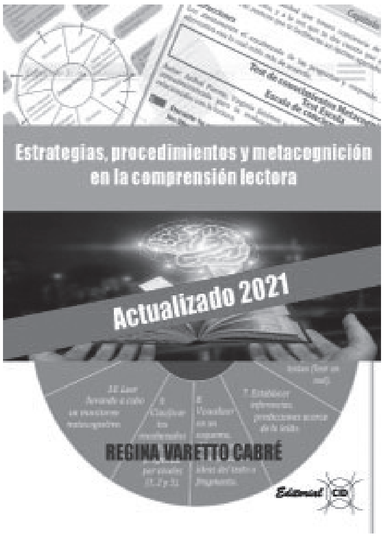
RESPUESTAS CAPÍTULO 16 PROBABILIDADES									
1. C	**2.** D	**3.** B	**4.** C	**5.** C	**6.** D	**7.** B	**8.** C	**9.** C	**10.** C
11. C	**12.** B	**13.** D	**14.** B	**15.** B	**16.** D	**17.** D	**18.** C	**19.** C	**20.** C
21. C	**22.** B	**23.** C	**24.** D	**25.** B	**26.** A	**27.** D	**28.** B	**29.** C	**30.** D
31. B	**32.** D	**33.** C	**34.** D	**35.** B	**36.** B	**37.** D	**38.** D	**39.** C	**40.** C
41. A	**42.** D	**43.** B	**44.** B	**45.** D	**46.** C	**47.** B	**48.** B	**49.** C	**50.** B
51. C	**52.** C	**53.** C	**54.** B	**55.** C	**56.** D	**57.** D	**58.** D	**59.** C	**60.** C

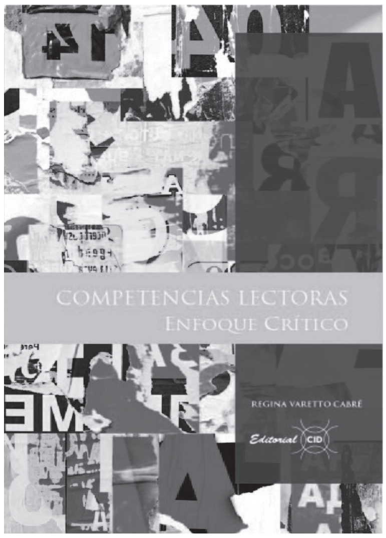
MIS APUNTES

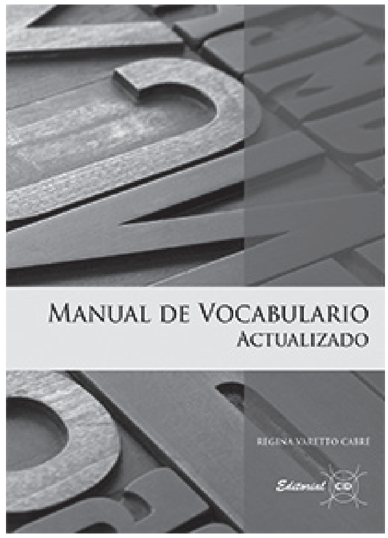
OTRAS PUBLICACIONES

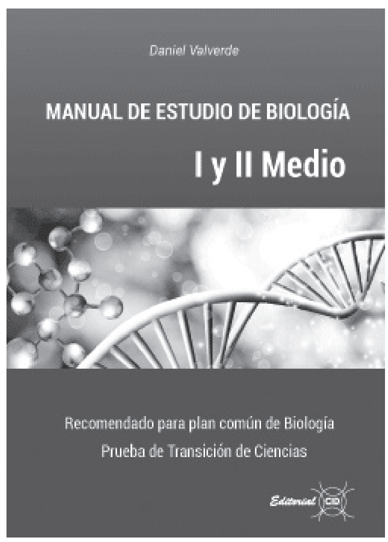


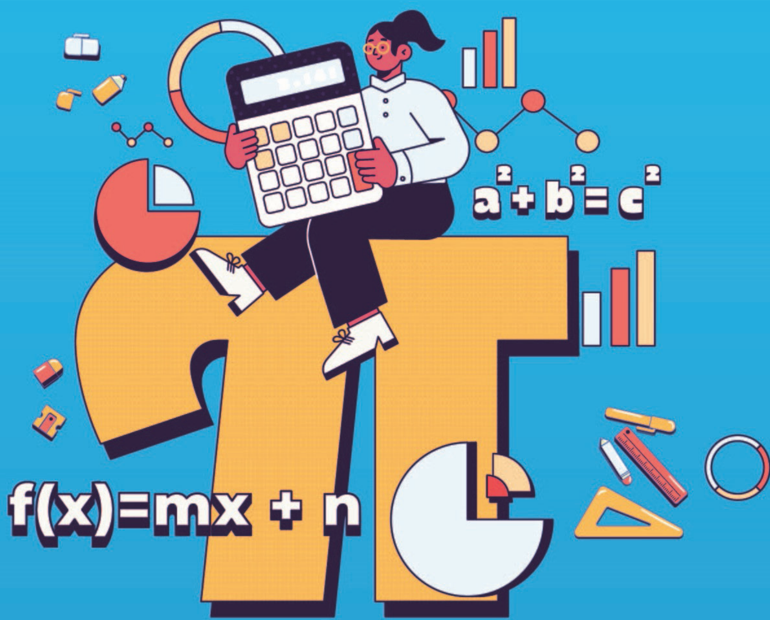












Texto preparación PAES

MATE

Prueba obligatoria **mática**

ISBN: 978-956-7705-56-6

9 789567 705566

Editorial CID en colaboración con Plataforma Educativa BRINCUS.com