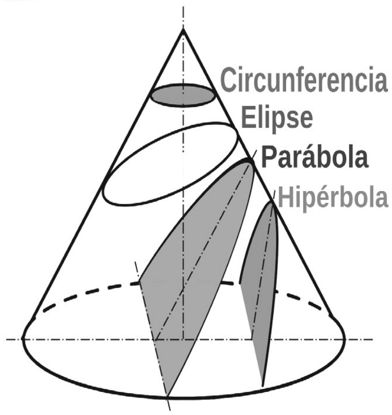
Capítulo
10

FUNCIÓN CUADRÁTICA



Apolonio de Perga, (262 a.C? - 190 a.C?), en su gran obra, conocida como "Las Cónicas", realizó un amplio estudio acerca de las curvas que se originan al cortar un cono por un plano, estas curvas se denominan secciones cónicas, que pueden ser un círculo, una elipse, una parábola y una hipérbola.
En este capítulo estudiaremos particularmente las parábolas, que son las curvas que resultan al graficar funciones cuadráticas.

CONCEPTOS CLAVES

- **Función cuadrática**
- **Forma canónica**
- **Intersecciones con los ejes**
- **Máximo y mínimo**
- **Eje de simetría y vértice**
- **Relación entre los coeficientes de la función cuadrática y el gráfico**

GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a,b y c $\in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) y su gráfica es una parábola.

- **Concavidad**

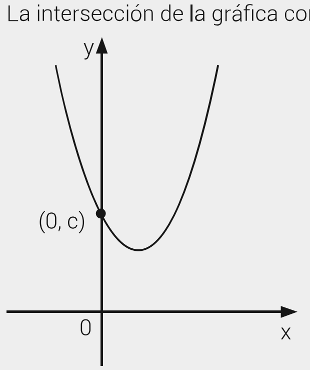
Las ramas de la parábola se abren hacia arriba o hacia abajo, dependiendo si el signo de a es positivo o negativo:

$a > 0$
las ramas se abren hacia arriba

$a < 0$
las ramas se abren hacia abajo

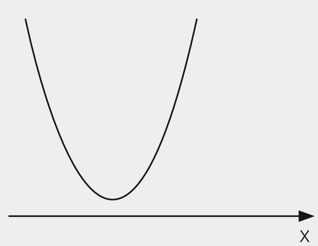
- **Intersección con eje y**

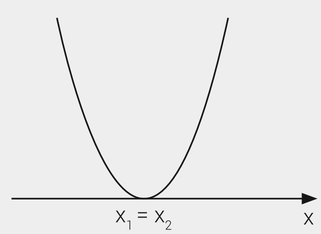
La intersección de la gráfica con el eje y es el punto (0,c):

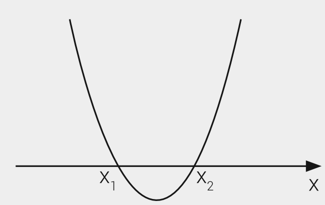


- **Intersección con eje x**

Las intersecciones de la gráfica de la función cuadrática, llamados ceros de la función, corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada a la función, estos pueden ser dos, uno o ninguno, dependiendo del signo del discriminante, como lo habíamos visto anteriormente.

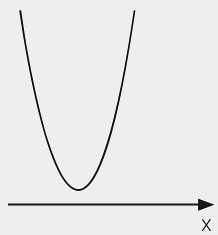
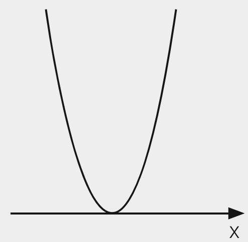
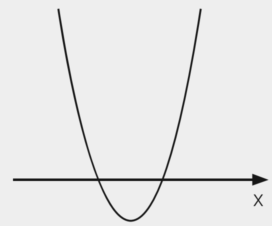
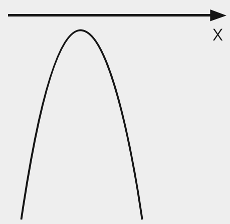
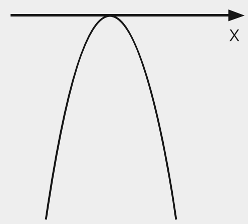
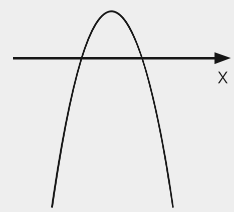






$b^2 - 4ac < 0$ La parábola no intersecta al eje x	$b^2 - 4ac = 0$ La parábola es tangente al eje x	$b^2 - 4ac > 0$ La parábola intersecta al eje x en dos puntos

Considerando el signo del coeficiente cuadrático y del discriminante, tenemos entonces los siguientes casos:

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

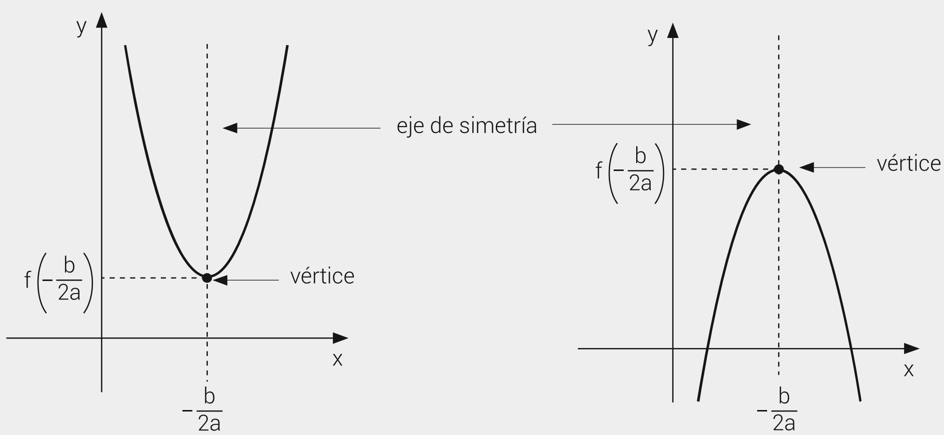
- **Vértice y eje de simetría**

El vértice es el punto más bajo en la gráfica cuando $a > 0$ y es el punto más alto cuando $a < 0$.

La abscisa del vértice corresponde a $x = -\dfrac{b}{2a}$ y su ordenada se puede calcular mediante

$y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, o bien $y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

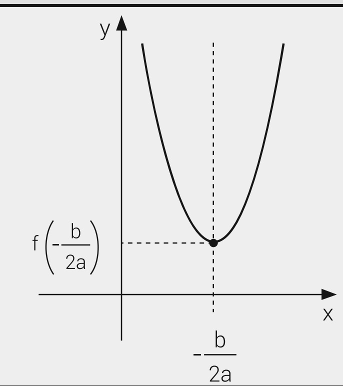
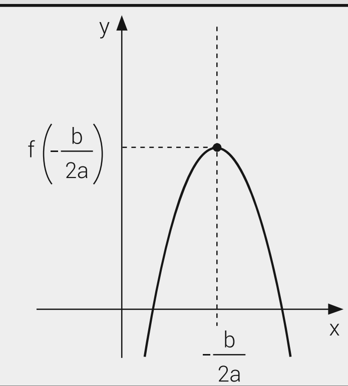
El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y, su ecuación es $x = -\dfrac{b}{2a}$.



10

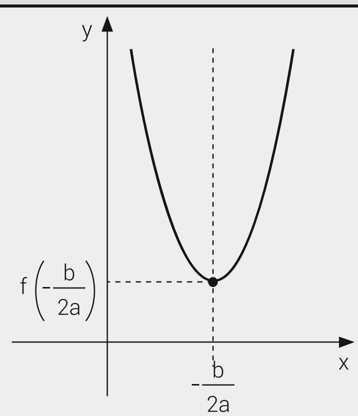
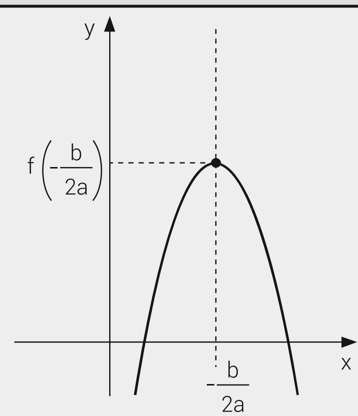
- **Máximo o mínimo**

Tanto el mínimo como el máximo de la función cuadrática se encuentran en el vértice, pero habrá un mínimo cuando $a > 0$ y un máximo cuando $a < 0$.

<table>
<tr><th>Caso a>0</th><th>Caso a<0</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Acá la función tiene un mínimo y su valor es
$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac - b^2}{4a}$</td><td>Acá la función tiene un máximo y su valor es
$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac - b^2}{4a}$</td></tr>
</table>

- **Dominio y Recorrido**

El dominio de la función $y = f(x)$ corresponde al conjunto de todos los valores de x y el recorrido corresponde a todos los valores de las imágenes.
El dominio de una función cuadrática corresponde al conjunto de los reales, Dom $f = \mathbb{R}$.
Mientras que el recorrido de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, depende del signo de a:

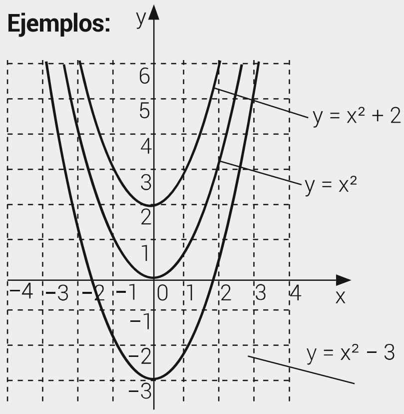
<table>
<tr><th>Caso a>0</th><th>Caso a<0</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Recorrido: $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty\right[$</td><td>Recorrido: $\left]-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$</td></tr>
</table>

TRASLACIONES A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

- **Traslación vertical**

Si a una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia arriba y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia abajo.

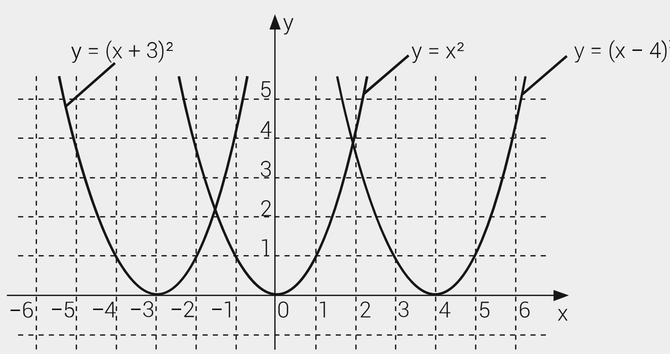
Ejemplos:



- **Traslación horizontal**

Si a la variable "x" de una función cuadrática se le suma una constante positiva "k", entonces su gráfico se traslada "k" unidades hacia la izquierda y si se le suma una constante negativa "k", el gráfico se traslada "k" unidades hacia la derecha.

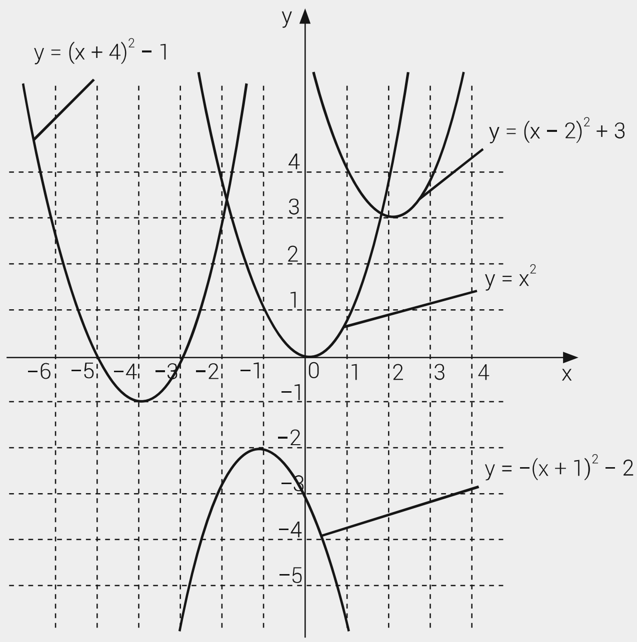
Ejemplos:



FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática de la forma: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ se denomina la forma canónica de una función cuadrática. Por lo visto anteriormente, si h y k son números reales positivos entonces la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ corresponde al gráfico de $f(x) = ax^2$ trasladado "h" unidades la derecha y "k" unidades hacia arriba.

Ejemplos:



ATENCIÓN

Este código QR te dirigirá a nuestro portal educativo en donde podras encontrar material como:
- **Clases con contenidos**
- **Videos con resolución de ejercicios**
- **Mini Ensayos - Ensayos y .... ¡mucho más!**

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = -x^2 + 6x - 9$, con respecto a la gráfica de esta función, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Intercepta al eje x en un solo punto.
B) Su vértice es el punto (3, 0).
C) Pasa por el punto (2, -1).
D) Intercepta al eje y en el punto (-9, 0)

Solución:

Para determinar en cuántos puntos la parábola intercepta al eje x calculamos el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, en este caso $\Delta = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot -9 = 36 - 36 = 0$, como $\Delta = 0$, la parábola intersecta al eje x en un solo punto, luego A) es verdadera.

Para calcular el vértice, utilizamos que la abscisa del vértice es $x = -\dfrac{b}{2a}$, en este caso $x = -\dfrac{6}{2 \cdot -1} = 3$, reemplazando en la función, obtenemos: $f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0$, luego el vértice es el punto (3, 0), por lo tanto B) es verdadera.

Para C) reemplazamos x = 2 en la función, $f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = -4 + 12 - 9 = -1$, luego C) es verdadera.

Para D) consideremos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersecta al eje y en el punto (0, c) en este caso sería (0, -9) y no (-9, 0), luego D) es falsa.

2. Sea la función definida en los reales mediante $f(x) = -(x - 3)^2 + 6$, con respecto a su gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Su vértice es el punto (-3, 6).
B) Pasa por el punto (2, 7).
C) Intercepta al eje y en el punto (0, 6).
D) Intercepta al eje x en dos puntos.

Solución:

Notemos que la función está en su forma canónica: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde (h, k) es el vértice de la gráfica de esta función, en este caso h = 3 y k = 6, luego el vértice es el punto (3, 6), luego A) es falsa.

Para B) reemplacemos x = 2 en la función, $f(2) = -(2 - 3)^2 + 6 = 5$, según lo que indica esta alternativa f(2) = 7, luego es falsa.

En C) si desarrollamos la expresión $-(x - 3)^2 + 6$, obtenemos $-x^2 + 6x - 3$, como c = -3, la gráfica de función cuadrática intercepta al eje y en el (0 , -3), luego esta alternativa es falsa.

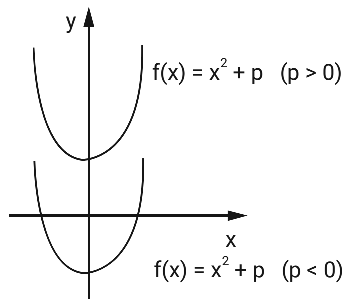
Para la alternativa D) determinemos el signo de la expresión $b^2 - 4ac$ (el discriminante), para ello ocupamos la expresión desarrollada: $-x^2 + 6x - 3$, tenemos que $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot -3 = 36 - 12 = 24$, como el discriminante es positivo, la gráfica intersecta al eje x en dos puntos, luego es verdadera.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la gráfica de la función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 + p$, con $p \neq 0$?

A) Su vértice está en el eje y.
B) Si $p > 0$, no intersecta al eje x.
C) Si $p < 0$, el discriminante asociado a esta función es positivo.
D) Podría ser tangente al eje x.

Solución:

Sabemos que el gráfico de $f(x) = x^2 + p$, corresponde a la gráfica de $g(x) = x^2$, desplazada "p" unidades hacia arriba o hacia abajo dependiendo si p es positivo o negativo respectivamente:



Observa que en ambos casos el vértice está en el eje y, por lo tanto A) es verdadera.
En el caso en que $p > 0$, se obtendría la parábola que está sobre el eje x (ver fig. anterior), por lo tanto no intersectaría al eje x, luego B) es verdadera.
Si $p < 0$, se obtendría la parábola cuyo vértice está bajo el eje x (ver fig.) luego intersectaría en 2 puntos al eje x, por lo tanto el discriminante es positivo, C) es verdadera.
Por último la alternativa D) es falsa, ya que la única forma de que la gráfica de la función $f(x) = x^2 + p$ sea tangente al eje x es que sea de la forma $f(x) = x^2$ y esto ocurre cuando $p = 0$, lo que es imposible, ya que se indica que $p \neq 0$.

10

4. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba, la función que modela la altura h(t) que alcanza a los t segundos de ser lanzado es $h(t) = 40t - 5t^2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 3 segundos alcanza una altura de 75 m.
B) A los 8 segundos el proyectil llega al suelo.
C) La máxima altura la alcanza a los 4 s.
D) La máxima altura es inferior a los 80 m.

Solución:

En A) calculamos h(3), lo que nos da $h(3) = 40 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 120 - 45 = 75$ m, luego es verdadera.
En B) calculamos h(8), obteniendo $h(8) = 40 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 0$ m, como la altura a los 8 s es cero, es verdadera.

Como la función dada es cuadrática, gráficamente la máxima altura se encuentra en el tiempo que corresponde al vértice, como la abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a}$, en este caso: $t = \frac{-40}{2 \cdot -5} = 4$, por lo que efectivamente la máxima altura ocurre a los 4 s de ser lanzado el proyectil, luego C) es verdadera.

Para hallar la altura máxima reemplazamos el tiempo hallado en C) en la función:
$h(4) = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 80$ m, luego la máxima altura es 80 m y no es inferior a 80 m, luego D) es falsa.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Visita nuestro portal educativo

1. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, su gráfica intercepta al eje de las abscisas en un solo punto?

A) $f(x) = x^2 – 5x + 6$
B) $g(x) = 2x^2 – 2x + 3$
C) $h(x) = 4x^2 – 12x + 9$
D) $m(x) = 9x^2 – 6x + 3$

2. Sea la función $f(x) = -x^2 + 6x + 16$, definida en los reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Su gráfica intercepta al eje y en el (0,16).
B) Su gráfica intercepta al eje x en dos puntos.
C) La función tiene un mínimo.
D) Su vértice es el punto (3, 25).

3. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, su gráfica tiene como vértice el punto (1, 4)?

A) $f(x) = -(x – 1)^2 + 2$
B) $f(x) = -(x – 1)^2 + 4$
C) $f(x) = (2x – 1)^2$
D) $f(x) = 4(x – 2)^2 – 9$

4. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, su vértice **NO** está en uno de los ejes coordenados?

A) $f(x) = -2x^2 + 5$
B) $g(x) = 3(x – 2)^2$
C) $h(x) = 4x^2$
D) $j(x) = -4(x – 3)^2 + 1$

5. ¿Cuál de las siguientes funciones cuadráticas definidas en los números reales, su gráfica tiene como vértice el punto (3, 1) y pasa por el punto (4, 3)?

A) $f(x) = -2x^2 + 12x – 17$
B) $g(x) = x^2 – 6x + 11$
C) $h(x) = 2x^2 – 12x + 19$
D) $j(x) = x^2 – 6x + 10$

6. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = -2(x - 3)(x - 5)$, entonces las coordenadas del vértice de la parábola asociada a su gráfica son

A) (4, −2)
B) (4, 2)
C) (4, −1)
D) (4, 1)

7. ¿Cuál de las siguientes funciones cuadráticas, definida en los reales, tiene como mínimo el -2 y su gráfico intercepta al eje de las abscisas en los puntos (5, 0) y el (7, 0)?

A) $f(x) = x^2 - 12x + 35$

B) $g(x) = 2x^2 - 24x + 70$

C) $h(x) = -2x^2 + 24x - 70$

D) $r(x) = -\frac{2}{35}x^2 + \frac{24}{35}x - 2$

8. La profesora de matemática de Ximena, le pide que de la función f definida en los reales, $f(x) = (x - 3)^2 - 2$, obtenga todas las preimágenes del 14, para ello, Ximena realiza los siguientes pasos:

$f(x) = (x - 3)^2 - 2$

Paso 1

$(x - 3)^2 - 2 = 14$

Paso 2

$(x - 3)^2 = 16$

Paso 3

$x - 3 = 4$

Paso 4

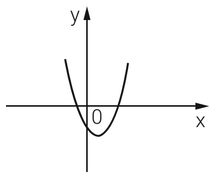
$x = 7$

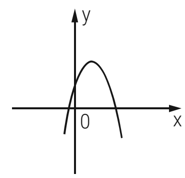
La preimagen es 7

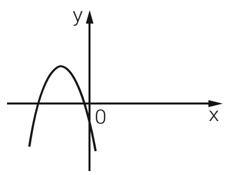
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

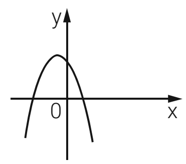
A) Cometió un error en el paso 1.
B) Cometió un error en el paso 2.
C) Cometió un error en el paso 3.
D) Cometió un error en el paso 4.

9. ¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder a la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x + 5$?

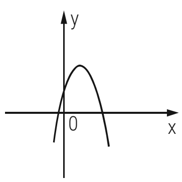
A) 

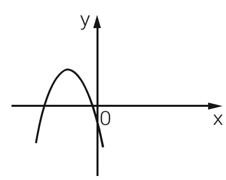
B) 

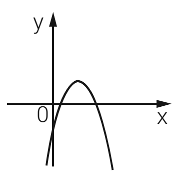
C) 

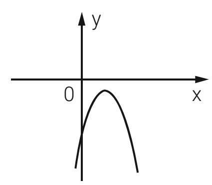
D) 

10. ¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder a la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 + x - 5$?

A) 

B) 

C) 

D) 

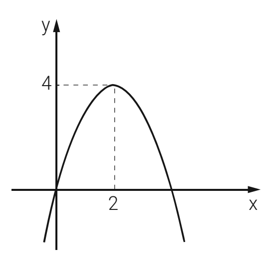
11. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene la siguiente gráfica?

A) $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$

B) $g(x) = -2(x - 2)^2 + 8$

C) $h(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4$

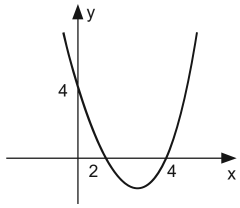
D) $j(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$



10

Editorial CID

12. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como gráfico la parábola de la figura?



A) $g(x) = (x - 3)^2 - 1$

B) $j(x) = (x - 3)^2 + 2$

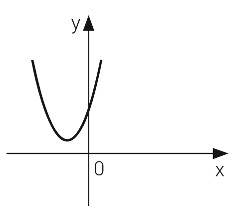
C) $k(x) = 2(x - 2)(x - 4)$

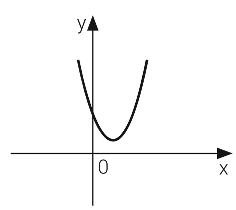
D) $m(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$

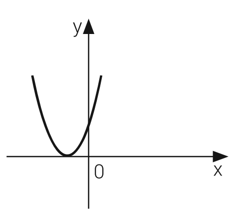
13. La gráfica de la función f definida en los reales mediante $f(x) = x^2 + a$, pasa por el punto (a, 2), entonces el (los) valor(es) de a es (son):

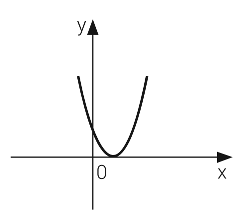
A) Solo 1
B) Solo −1
C) −2 o 1
D) Solo −2

14. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función cuadrática: $y = x^2 - 6x + 9$?

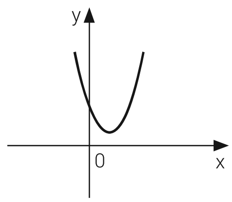
A) 

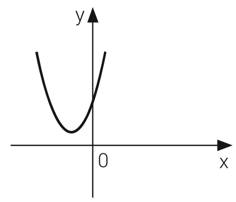
B) 

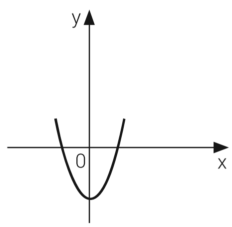
C) 

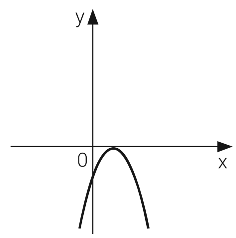
D) 

15. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función: $f(x) = (x + 2)^2 + 1$?

A) 

B) 

C) 

D) 

16. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = -2(x - 2)^2 + 18$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La gráfica intersecta al eje x en dos puntos.

B) La gráfica intersecta al eje y en el punto (0,18).

C) La preimagen del 10 según f son 0 y 4.

D) Si $-1 < x < 5$, entonces $f(x) > 0$.

17. Sea la función definida en los reales mediante $f(x) = -\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 9$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la gráfica de esta función?

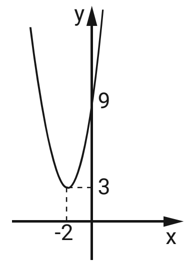
A) Su vértice es el punto $\left(\frac{1}{5}, 9\right)$.

B) La función tiene un mínimo.

C) Corta al eje x en dos puntos.

D) Pasa por el punto $\left(\frac{11}{5}, 5\right)$.

18. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales tiene la gráfica que se muestra a continuación?



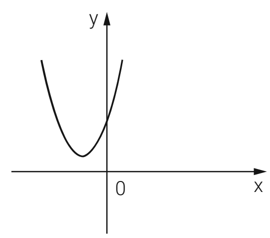
A) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 9$

B) $f(x) = \frac{3}{2}(x + 2)^2$

C) $f(x) = \frac{3}{2}(x + 2)^2 + 9$

D) $f(x) = \frac{3}{2}(x + 2)^2 + 3$

19. El gráfico de la figura, corresponde a la de la función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - px - r$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) $r < 0$

B) $p^2 + 4r < 0$

C) $p > 0$

D) $x^2 - px - r > 0$, para todo x real.

20. Sea la función $f(x) = 2(x - p)^2 + q$, definida en los reales, con p y q constantes distintas de cero. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Su gráfica tiene como vértice el punto (p, q).
B) El recorrido es el intervalo $[q, \infty[$
C) El mínimo de la función es $y = q$.
D) La gráfica intersecta al eje y en el punto $(0, q)$.

21. ¿Cuál de las siguientes funciones definida en los reales positivos **NO** corresponde a una función cuadrática?

A) Área de un triángulo equilátero en términos de la longitud de su lado.
B) Área de un rectángulo de perímetro constante en términos de su largo.
C) Área de un hexágono regular en términos de la longitud de su lado.
D) La variación del área de una circunferencia cuando su radio aumenta en 2 unidades en términos de su radio.

10

22. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = ax^2 + (a + 2)x + 2$, con $a \neq 0$. ¿Cuál de las siguientes relaciones se debe cumplir, para que la gráfica de la función intersecte al eje x en un solo punto?

A) $a = -2$

B) $a = 2$

C) $a^2 - 4a + 4 > 0$

D) $a^2 - 4a + 4 < 0$

23. ¿Cuál es el conjunto de todos los valores de a, para que la gráfica de la función definida por $f(x) = (x - a)^2 + 4a$, intersecte al eje x en dos puntos?

A) $]0, \infty[$

B) $]-\infty, 0[$

C) $]-\infty, 0]$

D) $[0, \infty[$

24. La gráfica de la función $f(x) = (a - 2)x^2 + 2(a - 1)x + a - 1$, con $a \neq 2$ y dominio los números reales, intersecta en dos puntos al eje x, si

A) $a < 1$

B) $a = 1$

C) $a > 1$

D) $a > 2$

25. ¿Para qué valores de k, la gráfica de la función f definida en los reales, mediante $f(x) = x^2 - (k + 3)x + k^2$, es tangente al eje x?

A) Solo para el 1.

B) Solo para el -1.

C) Solo para el 3.

D) Solo para el 3 y el -1.

26. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - 4bx - 2$, con $b \neq 0$, entonces el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es

A) $2b$
B) $-2b$
C) $4b^2 + 2$
D) $-4b^2 - 2$

27. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la función $f(x) = -(x^2 + 4)$ si el dominio son todos los números reales?

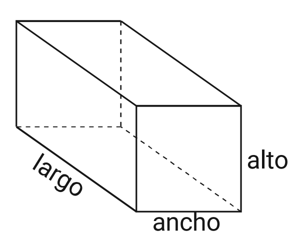
A) La gráfica no intersecta al eje x.
B) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje y.
C) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje x.
D) Su gráfica tiene al eje y como eje de simetría.

28. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como recorrido los reales menores o iguales que -1?

A) $g(x) = (x - 3)^2 - 1$
B) $h(x) = -(x - 3)^2 + 1$
C) $k(x) = -(x - 1)^2 - 2$
D) $t(x) = -(x - 4)^2 - 1$

29. Se tiene una paquete de margarina cuya forma es de un paralelepipedo de base rectangular, el largo mide tres cm más que el ancho y el alto mide un cm más que el ancho, posteriormente se modifica el envase de tal forma que el largo disminuye en 2 cm, el ancho aumenta en 2 cm y el alto disminuye en 1 cm, ¿cuál de las siguientes funciones definidas en los reales positivos determina la variación positiva del volumen de este envase en términos del ancho "x" del envase original?

A) $f(x) = x^2 + x$
B) $g(x) = x^2 + 3x + 2$
C) $h(x) = x^2 + 5x + 6$
D) $j(x) = 3x^2 + 6x$



30. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - ax + 6$, con $a \neq 0$.
Si el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es −2, entonces a =

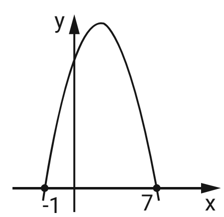
A) 4
B) −8
C) −4
D) 4 o −4

31. ¿En cuál de las siguientes funciones definidas en los números reales, su gráfica **NO** intercepta al eje de las abscisas?

A) $f(x) = -(x - 3)^2$
B) $g(x) = -(x - 2)^2 + 1$
C) $h(x) = (x - 3)^2 + 1$
D) $j(x) = (x - 3)^2 - 2$

32. La gráfica representa a la gráfica de la función cuadrática f definida en los reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si $a > b > 3$, entonces $f(a) < f(b)$.
B) Si $a < b < 3$, entonces $f(a) < f(b)$.
C) $f(3 - a) = f(a + 3)$.
D) Si $-1 < x < 7$, entonces $f(x) < 0$.

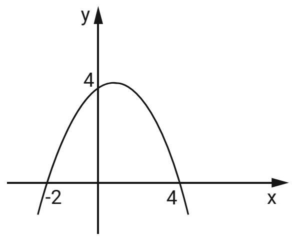


33. ¿En cuál de las siguientes funciones definidas en los reales se cumple que $f(2 + t) = f(2 - t)$, para todo número real t?

A) $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$
B) $g(x) = -(x + 2)^2 - 4$
C) $h(x) = -x^2 + 2$
D) $j(x) = x^2 - 2$

10

34. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales tiene el gráfico que se muestra a continuación?



A) $f(x) = (x + 2)(x - 4)$

B) $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 4)$

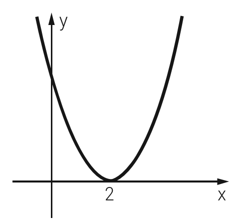
C) $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

D) $j(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)(x + 4)$

35. Sea f una función definida en los reales, mediante $f(x) = -x^2 + p$, con $p > 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si $a < b < 0$, entonces $f(a) < f(b)$.
B) Si $-\sqrt{p} < x < \sqrt{p}$, entonces $f(x) > 0$.
C) Para todo valor real de x, $f(x) \leq p$.
D) Si $a < 0 < b$, entonces $f(a) < f(b)$.

36. La función g, definida en los reales mediante $g(x) = x^2 - ax + b$, cuya gráfica es la siguiente:
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) $a = b$
B) La gráfica intersecta al eje y en el (0,a).
C) El mínimo de la función es $y = 0$.
D) El recorrido de la función son los reales positivos.

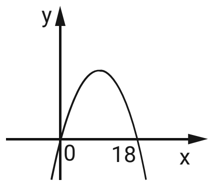
37. La distancia d(t) que recorre un móvil que se desplaza con aceleración constante, está dada por la función definida en los reales positivos, $d(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, donde v_0 es la rapidez inicial (medida en m/s) , a es la aceleración (medida en m/s^2) y t es el tiempo (medido en s).
Si en un cierto trayecto la rapidez inicial de un móvil es 20 m/s y su aceleración se mantiene constante a 40 m/s^2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

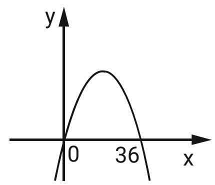
A) A los 2 s habrá recorrido menos de 100 m.
B) A los 4 s alcanza una distancia de 400 m.
C) A los 5 s alcanza una distancia superior a los 600 m.
D) A los 6 s alcanza una distancia superior a los 900 m.

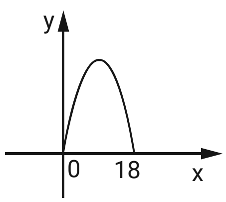
38. Se tiene un cuadrilátero de ángulos rectos, de perímetro 36 cm, ¿cuál de las siguientes funciones modela el área A(x) de este cuadrilátero en términos de su ancho "x"?

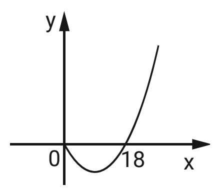
A) $A(x) = -x^2 - 18x$
B) $A(x) = -x^2 + 18x$
C) $A(x) = -x^2 + 36x$
D) $A(x) = -x^2 - 36x$

39. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor a la función A(x) del ejercicio anterior?

A) 

B) 

C) 

D) 

10

40. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba y la altura h(t) que alcanza a los "t" segundos de ser lanzado se modela con la función $h(t) = 20t - 5t^2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Al segundo de ser lanzado alcanza una altura de 15 m.
B) Al segundo y a los 3 segundos alcanza la misma altura.
C) A los 8 s el proyectil llega al suelo.
D) La máxima altura que alcanza el proyectil es 20 m.

41. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - bx$, con $b < 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Su vértice está en el cuarto cuadrante.
B) Su gráfica corta al eje x en el (-b, 0).
C) Si $b < x < 0$, entonces $f(x) < 0$.
D) Si $x < 0$, entonces $f(x) > 0$.

42. La siguiente tabla de valores corresponde a la función cuadrática definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + bx$:

x	f(x)
2	8
-1	-1
0	0

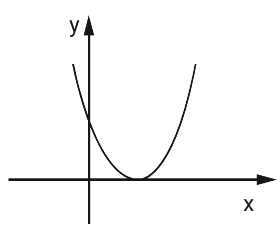
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

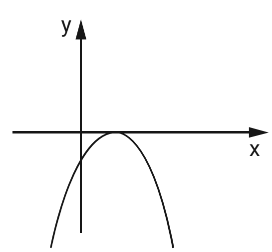
A) Su vértice tiene como coordenadas uno de los pares ordenados que aparecen en la tabla.
B) Su gráfica corta al eje de las abscisas en el (-2, 0).
C) Su gráfica pasa por el (-3, 3).
D) Para todo real x, $f(x) > -1$.

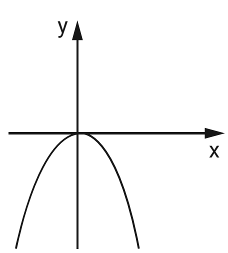
43. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + c$, con $a \neq 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

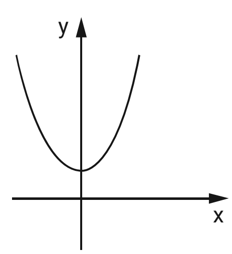
A) Su gráfica tiene al eje de las ordenadas como eje de simetría.
B) Su vértice está en el eje de las ordenadas.
C) Si $c < 0$, la gráfica corta al eje de las abscisas.
D) Si $ac > 0$, no corta al eje de las abscisas.

44. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = x^2 - px + r$ con $p^2 = 4r$, ¿cuál de las siguientes gráficos podría corresponder a esta función?

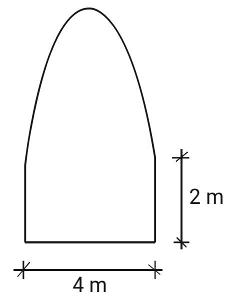
A) 

B) 

C) 

D) 

45. En la figura se muestra un arco, el cual se ha construido de modo que hasta los 2 metros de altura sus paredes son verticales y sobre estas paredes se ha montado un arco parabólico donde la función que modela el interior del arco es $f(x) = -2x^2$, ¿cuál es la altura máxima de este arco?



A) 6 m

B) 8 m

C) 10 m

D) 34 m

46. Se va a construir un envase de aluminio sin tapa de forma cilindríca para colocar bombones en su interior. Si la altura mide un cm más que el radio basal "x", si se aproxima π a 3, ¿cuál de las siguientes funciones definidas en los reales positivos modela la cantidad de cm^2 de aluminio que se requieren para fabricar este envase?

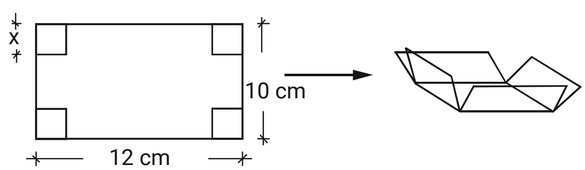
A) $f(x) = 12x^2 + 6x$

B) $f(x) = 9x^2 + 6x$

C) $f(x) = 12x^2$

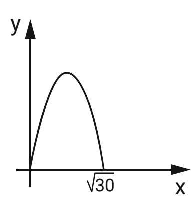
D) $f(x) = 3x^3 + 3x^2$

47. A un pedazo de cartulina de forma rectangular cuyas dimensiones se muestran en la figura, se recortan en sus cuatro esquinas cuadrados de lado "x" cm, con el material sobrante se forma la caja que se muestra en la derecha:

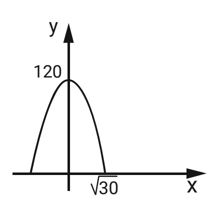


¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función que modela el área de la caja en términos de "x"?

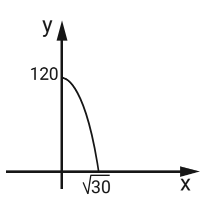
A)



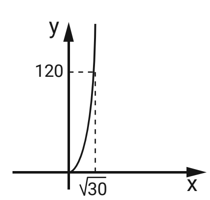
B)



C)



D)

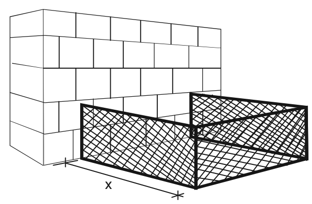


48. Debido a la caza indiscriminada de guanacos en ciertos sectores en el norte del país, una fundación destinada a la preservación de especies, ha realizado un estudio de la población de esta especie en un cierto sector. Para ello se ha obtenido el modelo, $P(t) = -25t^2 + 500t$, el cual indica la población en un cierto periodo de tiempo, donde t es la cantidad de años transcurridos donde se inició la medición, con $0 < t \leq 20$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Antes de los 10 años la población de guanacos iba en aumento.
B) A los 10 años la población alcanzó su máximo.
C) A los 11 años la población de guanacos era menor que a los 9 años
D) La población máxima fue de 2.500 guanacos.

49. Una reja cuya base es un cuadrilátero de ángulos rectos, se ocupará para encerrar unas aves. Si la reja tiene tres lados, una longitud de 40 m y se apoya sobre una pared tal como se muestra en la figura, ¿cuál es la función definida en los reales positivos que modela el área (medida en m^2) que encierra esta reja en términos de su ancho "x"?

A) $f(x) = 40x - x^2$
B) $f(x) = 20x - x^2$
C) $f(x) = 40x - 2x^2$
D) $f(x) = 20x - 2x^2$



50. La temperatura de una habitación T(t) medida en °C, se ha modelado con la función $T(t)= -\frac{4}{5}t^2 + 8t + 12$, con t la cantidad de horas transcurridas desde mediodía, con $0 < t \leq 4$.
Juan es un técnico en aire acondicionado y utilizará este modelo para determinar la temperatura máxima de la habitación, para ello sigue los siguientes pasos:

(1) Cálculo de la abscisa del vértice
Calcula la abscisa del vértice de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, utilizando que $x_v = -\frac{b}{2a}$, reemplazando se obtiene: $x_v = \frac{-8}{2\cdot\frac{-4}{5}} = 5$, por lo que para t = 5 la función alcanza su máximo.

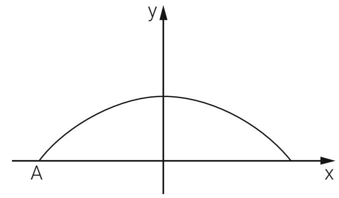
(2) Cálculo del máximo de la función
Ahora reemplaza t = 5, en la función que modela la temperatura: $T(5) = -\frac{4}{5} \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 + 12 = 32$ °C.

(3) Interpretación de los resultados
Como el modelo se aplica desde las 12 A.M., y la temperatura máxima se alzanza para t = 5, entonces sumamos 5 horas a las 12 A.M., por lo que se deduce que a las 5 P.M. se obtendrá la temperatura máxima, la cual será de 32 °C.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Juan se equivocó en (1).
B) Juan se equivocó en (2).
C) Juan se equivocó en (3).
D) Juan no cometió errores.

10

51. Raúl está regando su jardín, en la figura, se ha representado el chorro de agua que sale de la manguera. Si Raúl está ubicado en el punto A, y la función que modela la altura h del chorro de agua, hasta que llega al suelo es $h(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 4$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El chorro llega a 20 metros donde está Raúl.
B) La máxima altura que alcanza el chorro es de 4 metros.
C) El modelo se ajusta solo para $-10 \leq x \leq 10$.
D) A un metro de Raúl, en la dirección del chorro, la altura que alcanza este es $\frac{24}{25}$ m.

52. Para un estudio acerca de la cantidad de vehículos que pasa por un pórtico de un telepeaje entre las 7 y las 8 de la mañana, se ha modelado que la cantidad C(t) de vehículos que pasa a los t minutos después de las 7 A.M. en un cierto día, está dado por $C(t) = 180 - \frac{1}{5}(t - 30)^2$, con $0 < t \leq 60$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

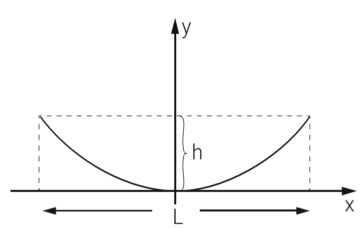
A) En el tiempo de estudio, a las 7:30 A.M. se alcanza el peak de vehículos.
B) Entre las 7 y 7:30 el flujo vehicular va en aumento.
C) El peak de vehículos que pasó por este pórtico durante ese dia fue de 180 vehículos.
D) A las 7:10 y a las 7:50 transitó la misma cantidad de vehículos por este pórtico.

53. Para un estudio acerca de la cantidad de vehículos que se estacionan en un aparcamiento en el centro de la ciudad, se ha determinado que en un cierto dia el número de vehículos N(t) estacionados a las t horas después de abrir el estacionamiento se puede modelar con la función $N(t) = -4t^2 + 48t + 52$. Si este modelo se aplica desde las 7 A.M. (hora de apertura del estacionamiento) hasta la hora de cierre, 8 P.M.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) En el momento de la apertura del estacionamiento ya había 52 vehículos estacionados.
B) A la 1 P.M. se produjo el peak de vehículos estacionados.
C) Hubo un instante en que la cantidad de vehículos estacionados fue superior a 200.
D) A la hora de cierre no había vehículos estacionados.

54. En la figura, se muestra la vista lateral de un puente de forma parabólica, el cual se ha modelado con la función $f(x) = \frac{1}{20}x^2$. Si la altura h del puente es 5 metros, entonces la longitud L del puente es

A) 5 m
B) 10 m
C) 20 m
D) 40 m



55. Laura quiere vender su casa, para estimar un precio de venta, ha hecho un estudio del precio de venta P(t) de propiedades similares a la suya, en el mismo sector, durante estos últimos 8 años. Este estudio, le ha permitido confeccionar el modelo $P(t) = 40t^2 – 240t + 2460$, donde t es el tiempo (en años), transcurridos desde el 2012. Según este estudio, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

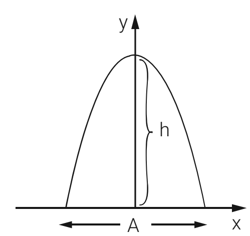
A) En el año 2012 el precio de las viviendas era inferior a las 2500 UF.
B) Hasta el año 2015 el precio de las viviendas iba bajando.
C) El año 2020, las viviendas alcanzaron su precio máximo.
D) El precio mínimo de las viviendas fue superior a los 2100 UF.

56. La cantidad de kilos de azúcar vendidos C(t) en un supermercado de una comuna durante nueve meses se ha modelado con la función $C(t) = -6t^2 + 60t + 150$, donde t es la cantidad de meses que han transcurrido desde el mes de enero del año pasado, con $0 < t \leq 9$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El modelo se aplica desde el mes de enero del año pasado.
B) La mayor cantidad de azúcar vendida en un mes fue de 300 kilos.
C) En el último mes se vendieron 204 kilos.
D) En el mes de marzo se vendieron 246 kilos.

57. Un tunel tiene forma parabólica, tal como se muestra en la figura.
Si la función que modela la forma del interior del tunel se ha modelado con la función $f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 10$, donde las variables x e y están expresadas en metros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La altura "h" del tunel es de 10 metros.
B) La amplitud o luz "A" del tunel mide 4 metros.
C) A un metro del eje de simetría la altura del tunel es superior a los 9 m.
D) A dos metros del eje de simetría la altura disminuye en un 25%.



58. En un reserva protegida se ha hecho un estudio para determinar la evolución de la población de cebras y su depredador natural el león. La población de cebras se ha modelado con la función $C(t) = 10t^2 + 80t + 162$ y la de los leones es $L(t) = 160t + 2$, ambas medidas en decenas de ejemplares, donde t es el tiempo transcurrido en meses desde que se inició el estudio, con $0 \leq t \leq 20$.
Según estos modelos poblacionales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Al inicio del estudio había 20 leones.
B) Al final del estudio la población de leones será inferior a 32.000 ejemplares.
C) A los 4 meses ambas poblaciones tendrán igual cantidad de especies.
D) Ambas poblaciones crecen en el transcurso del tiempo.

10

59. Las ganancias de una empresa, medidas en millones de dólares, se modelan según la función cuadrática $G(t) = -\frac{6}{32}(t-9)^2 + 12$, donde t es la cantidad de años desde que fue inaugurada.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 9 años se obtuvo la máxima ganancia.
B) A los 8 y a los 10 años obtuvo la misma ganancia.
C) Después de los 9 años sus ganancias empezaron a disminuir.
D) La ganancia anual siempre fue inferior a 12 millones de dólares.

60. La altura h(t) alcanzada, medida en metros, de un proyectil se modela mediante la función $h(t) = 20t - 5t^2$, donde t es la cantidad de segundos que transcurren hasta que alcanza dicha altura. Con respecto al proyectil, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 4 segundos llega al suelo.
B) A los 2 segundos alcanza su altura máxima.
C) Al primer y tercer segundo después de ser lanzado alcanza la misma altura.
D) Su altura siempre es inferior a los 20 m.