4to Medio Matemáticas

Variable aleatoria Continua

Ejercicios

1. La longitud de ciertos tornillos (en centímetros) es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(-x^2 + 4x - 3\right) & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & en\ otro\ punto \end{cases}$$

   a. Para hacer cierto trabajo se prefieren tornillos con longitud entre 1,7 cm y 2,4 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo tenga dicha longitud?

   b. Si la longitud de cada tornillo es independiente de la longitud de otro tornillo. ¿Cuál es la probabilidad de que tres tornillos tengan la longitud que se prefiere?

   c. Si para construir lo que se necesita con uno de estos tornillos hay que hacer un gasto de $10 por cm de longitud que tenga el tornillo más un gasto fijo de $4. ¿Cuál es el gasto medio esperado por un tornillo?

- Respuesta

1. a

La variable es X: longitud de ciertos tornillos (en cm).

Calculamos la probabilidad pedida $P\,(1,7 \leq X \leq 2,4)$ cómo el área bajo la curva de densidad entre $x = 1,7$ y $x = 2,4$:

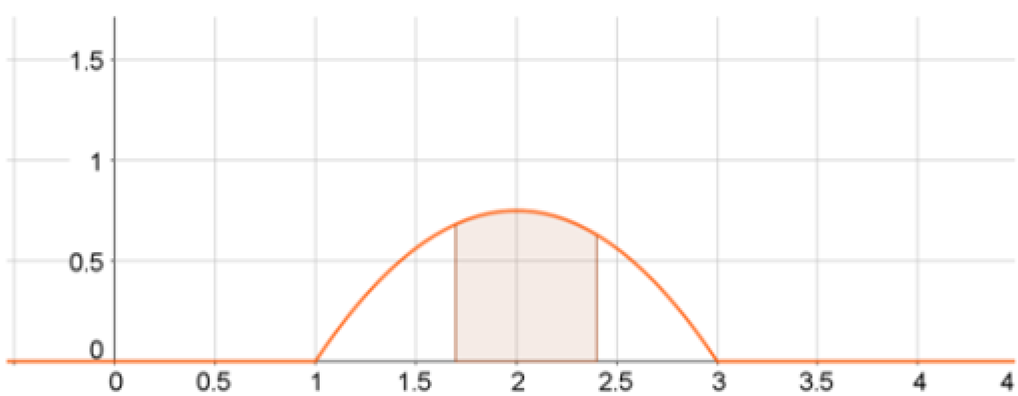
$$P\,(1,7 \leq X \leq 2,4) = \int_{1,7}^{2,4} \frac{3}{4}\left(-x^2 + 4x - 3\right) dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_{1,7}^{2,4}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(-\frac{(2,4)^3}{3} + 2(2,4)^2 - 3\,(2,4)\right) - \left(-\frac{(1,7)^3}{3} + 2(1,7)^2 - 3\,(1,7)\right)\right]$$

$$= 0,50225$$

Una gráfica de la curva de densidad f mostrando el área comprendida entre $x = 1,7$ y $x = 2,4$ es la siguiente:



1. b

Si llamamos T_i al suceso de que el tornillo i tiene la longitud que se prefiere. La probabilidad que buscamos puede expresarse así:

$$P\left(T_1 \cap T_2 \cap T_3\right)$$

Cómo son sucesos independientes:

$$P\left(T_1 \cap T_2 \cap T_3\right) = P\left(T_1\right) P\left(T_2\right) P\left(T_3\right)$$

Pero ya conocemos $P\left(T_i\right)$ porque la calculamos en el ítem a. Luego:

$$P\left(T_1 \cap T_2 \cap T_3\right) = (0,50225)^3 \cong 0,1267$$

1. c

La variable gasto G depende de la variable X de la siguiente forma:

$$G = 10X + 4$$

Aplicando esperanza a cada miembro y usando propiedades de la esperanza obtenemos:

$$E\left(G\right) = 10E\left(X\right) + 4$$

Entonces debemos calcular $E\left(X\right)$.

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) x dx$$

$$= \int_1^3 \frac{3}{4}\left(-x^2 + 4x - 3\right) . x dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_1^3 \left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right) dx$$

$$= \frac{3}{4}.\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_1^3$$

$$= \frac{3}{4}.\left[\left(-\frac{3^4}{4}+\frac{4.3^3}{3}-\frac{3.3^2}{2}\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+\frac{4.1^3}{3}-\frac{3.1^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}.\left[\left(-\frac{81}{4}+\frac{108}{3}-\frac{27}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= 2$$

Notemos que la función de densidad es simétrica respecto de x=2. Así que es razonable que hallamos obtenido que $E(X) = 2$.

Entonces:

$$E(G) = 10.2 + 4 = 24$$