4to Medio Matemáticas

Distribución Binomial

Ejercicios

1. Supongamos que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamblaje es de 0.05. Si el conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes:
    1. ¿cuál es la probabilidad de que entre diez unidades dos se encuentren defectuosas?
    2. ¿y de que a lo sumo dos se encuentren defectuosas?
    3. ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

2. El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservas sabe, por experiencia, que el 20% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservas, pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?

3. Sean λ y η las variables aleatorias que cuentan el número de veces que sale 1 y 6, respectivamente, en 5 lanzamientos de un dado. ¿Son λ y η independientes?

4. Una prueba consta de 200 preguntas de verdadero o falso, para un sujeto que respondiese al azar ¿Cual sería la probabilidad de que acertase:
   a) 50 preguntas o menos.

   b) Más de 50 y menos de 100.

   c) Más de 120 preguntas.

Respuesta

1.

Sea δi una variable aleatoria que representa el estado de una unidad terminada en la línea de ensamblaje en el momento *i*, siendo δi= 1 si la unidad es defectuosa y δ=0 en caso contrario. La variable δ sigue una distribución Bernoulli con parámetro p=0'05, de acuerdo con el dato inicial del problema. Además, nótese que un conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes, por lo que el número de unidades defectuosas de un total de n unidades terminadas (δ1.........δn), esto es, $\eta_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} \delta i$, sigue una distribución binomial de parámetros n y p=0,05. Hechas estas consideraciones iniciales, procedemos a resolver el problema:

1. Procedamos a calcular:

$$P(\eta_{10,0'05} = 2) = \binom{10}{2} * 0'05^{2} * (1-0,05)^{8} = 0,0476$$

2. Se tiene que:

$$P(\eta_{10,0'05} \leq 2) = \binom{10}{i} * 0'05^{i} * (1-0,05)^{10-i} = 0,9984$$

3. Por último:

$$P(\eta_{10,0'005} \geq 1) = 1 - P(\eta_{10,0'05} = 0) = 1 - \binom{10}{0} * 0,05^{0} * (1-0,05)^{10-0} = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

2.

Representemos por la variable aleatoria δ la decisión de asistir (δ = 0) o no (δ = 1) finalmente al restaurante por parte de una persona que ha hecho una reserva. Esta variable sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $p = 0,2$, de acuerdo con el enunciado del ejercicio. Suponiendo que las distintas reservas son independientes entre sí, se tiene que, de un total de n reservas (δ 1.... δ n), el número de ellas que acuden finalmente al restaurante es una variable aleatoria $Yn = \sum_{i=1}^{n} \delta 1$, con distribución binomial de parámetros n y p=0,2. En el caso particular del problema, n=25. Entonces, para aquellas personas que asistan al restaurante de las 25 que han hecho la reserva puedan disponer de una mesa, debe ocurrir que acudan 20 o menos. Así se tiene que:

$$P(Y \leq 20) = \sum_{i=0}^{20} \binom{25}{i} * 0,2^{i} * (1-0,2)^{25-i} = 0,5799$$

3.

Las variables λ y η siguen una distribución binomial de parámetros n=5 y p=1/6. Veamos mediante un contraejemplo, que λ y η no son independientes. Por un lado se tiene que:

$$P = (\lambda = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{5},$$

pero

$$P(\lambda = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = P(\eta = 0)$$

$$P = (\lambda = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{5} \neq P(\lambda = 0) * P(\eta = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10},$$

concluyéndose así que las variables no son independientes.

4.

El número de preguntas acertadas seguirá una distribución Binomial con n = 200 y p= 0,5. Ahora bien, como el número de pruebas es elevado esta distribución se puede aproximar por una Normal de media 200·0,5 = 100 y de varianza 200·0,5·0,5 = 50 o lo que es lo mismo con desviación típica 7,07, luego:

a) $P(x \leq 50) \approx P(X \leq 50{,}5) = P\left(Z \leq \frac{50{,}5-100}{7{,}07}\right) = P(Z \leq -7) \approx 0$

b) $P(50 \prec x \prec 100) = P(x \leq 99) - P(x \leq 51) = P\left(Z \leq \frac{99{,}5-100}{7{,}07}\right) - P\left(Z \leq \frac{50{,}5-100}{7{,}07}\right) =$

$P(Z \leq -0{,}07) - P(Z \leq -7) = 0{,}4721 - 0 = 0{,}4721$

c) $P(x \succ 120) = P\left(Z \succ \frac{120{,}5-100}{7{,}07}\right) = 1 - P(Z \leq 2{,}9) = 1 - 0{,}9981 = 0{,}0019$