8° Básico

Modulo Inecuaciones lineales con coeficientes racionales

Ejercicios

1. Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{5}{2x-4} < 0$$

2. Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{-3}{3x-5} > 0$$

3. Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{3x}{x+2} \geq 2$$

4. Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 1$$

5. Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{450}{x} - 4 - 0{,}1x < 0$$

6. Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{3x-2}{x-1} - 1 \geq \frac{2x-1}{x+1}$$

Respuestas

1. El numerador siempre es positivo, por tanto, para que el cociente sea negativo como indica la desigualdad (< 0) el denominador tiene que ser negativo.

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Estudiamos el signo del denominador en los intervalos: $(-\infty , 2)$, $(2 , \infty)$

- $(-\infty , 2)$: $x = 0 \Rightarrow 2x - 4 = -4 < 0$
- $(2 , \infty)$: $x = 3 \Rightarrow 2x - 4 = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$

	$(-\infty , 2)$	$(2 , \infty)$
$2x - 4$	-	+
$\frac{5}{2x - 4}$	-	+

El conjunto de soluciones es: $(-\infty , 2)$

2. El numerador siempre es negativo, por tanto, para que el cociente sea positivo como indica la desigualdad (> 0) el denominador tiene que ser negativo también.

$3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = 5/3$

Estudiamos el signo del denominador en los intervalos: $(-\infty , 5/3)$, $(5/3 , \infty)$

- $(-\infty , 5/3)$: $x = 0 \Rightarrow 3x - 5 = -5 < 0$
- $(5/3 , \infty)$: $x = 2 \Rightarrow 3x - 5 = 3 \cdot 2 - 5 = 1 > 0$

	$(-\infty , 5/3)$	$(5/3 , \infty)$
-3	-	-
$3x - 5$	-	+
$\frac{-3}{3x - 5}$	+	-

El conjunto de soluciones es: $(-\infty , 5/3)$

3. $\frac{3x}{x+2} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{x+2} - 2 \geq 0$

$$\frac{3x - 2(x+2)}{x+2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{x+2} \geq 0$$

Calculamos las raíces del numerador y del denominador:

$$x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

$$x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

Estudiamos los signos en los intervalos: $(-\infty , -2) , (-2 , 4) , (4 , \infty)$

- $(-\infty , -2)$: $x = -3 \Rightarrow x - 4 = -3 - 4 = -7 < 0$

  $\Rightarrow x + 2 = -3 + 2 = -1 < 0$

- $(-2 , 4)$: $x = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 - 4 = -4 < 0$

  $\Rightarrow x + 2 = 0 + 2 = 2 > 0$

- $(4 , \infty)$: $x = 5 \Rightarrow x - 4 = 5 - 4 = 1 > 0$

  $\Rightarrow x + 2 = 5 + 2 = 7 > 0$

	$(-\infty , -2)$	$(-2 , 4)$	$(4 , \infty)$
$x - 4$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$\frac{x-4}{x+2}$	+	-	+

El conjunto de soluciones es: $(-\infty , -2) \cup [4 , \infty)$

Incluimos el valor $x = 4$, puesto que la desigualdad requiere que el cociente sea mayor o **igual** que 0.

No incluimos el valor $x = -2$, puesto que el cociente no está definido en - 2.

4. $\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0$

$$\frac{1+x-1(1-x)}{1-x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1-x} \geq 0$$

Calculamos las raíces del numerador y del denominador:

$2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$1 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Estudiamos los signos en los intervalos: $(-\infty , 0) , (0 , 1) , (1 , \infty)$

- $(-\infty , 0)$: $x = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2\cdot(-1) = -2 < 0$

  $\Rightarrow \quad 1 - x = 1 - (-1) = 2 > 0$

- $(0 , 1)$: $x = 1/2 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2\cdot(1/2) = 1 > 0$

  $\Rightarrow \quad 1 - x = 1 - (1/2) = 1/2 > 0$

- $(1 , \infty)$: $x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2\cdot2 = 4 > 0$

  $\Rightarrow \quad 1 - x = 1 - 2 = -1 < 0$

	$(-\infty , 0)$	$(0 , 1)$	$(1 , \infty)$
$2x$	-	+	+
$1 - x$	+	+	-
$\frac{2x}{1-x}$	-	+	-

El conjunto de soluciones es: $[0 , 1)$

Incluimos el valor $x = 0$, puesto que la desigualdad requiere que el cociente sea mayor o **igual** que 0.

No incluimos el valor $x = 1$, pues el cociente no está definido en 1.

5. $\frac{450}{x} - 4 - 0{,}1x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{450 - 4x - 0{,}1x^2}{x} < 0$

$$\frac{4500 - 40x - x^2}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2 - 40x + 4500}{x} < 0$$

Calculamos las raíces del numerador y del denominador:

$x = 0$

$- x^2 - 40x + 4500 = 0$

$$x = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4500}}{2 \cdot (-1)} = \frac{40 \pm 140}{-2} = \begin{cases} x_1 = -90 \\ x_2 = 50 \end{cases}$$

Obtenidas las raíces, podemos factorizar la ecuación de segundo grado:

$- x^2 - 40x + 4500 = (-1)(x + 90)(x - 50) = (x + 90)(50 - x) = 0$

Estudiamos los signos en los intervalos: $(-\infty , - 90) , (- 90 , 0) , (0 , 50) , (50 , \infty)$

• $(-\infty , -90)$: $x = - 100 \Rightarrow (x + 90)(50 - x) = (-100 + 90)(50 - (-100)) = (-10)(150) = - 1500 < 0$

$\Rightarrow x = - 100 < 0$

• $(-90 , 0)$: $x = -10 \Rightarrow (x + 90)(50 - x) = ((-10) + 90)(50 - (-10)) = (80)(60) = 4800 > 0$

$\Rightarrow x = - 10 < 0$

• $(0 , 50)$: $x = 10 \Rightarrow (x + 90)(50 - x) = (10 + 90)(50 - 10) = (100)(40) = 4000 > 0$

$\Rightarrow x = 10 > 0$

• $(50 , \infty)$: $x = 60 \Rightarrow (x + 90)(50 - x) = (60 + 90)(50 - 60) = (150)(-10) = - 1500 < 0$

$\Rightarrow x = 60 > 0$

	$(-\infty , - 90)$	$(- 90 , 0)$	$(0 , 50)$	$(50 , \infty)$
$- x^2 - 40x + 4500$	-	+	+	-
x	-	-	+	+
$\frac{-x^2 - 40x + 4500}{x}$	+	-	+	-

El conjunto de soluciones es: $(-90 , 0) \cup (50 , \infty)$

6. $\frac{3x-2}{x-1} - 1 \geq \frac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{3x-2-(x-1)}{x-1} \geq \frac{2x-1}{x+1}$

$\frac{2x-1}{x-1} \geq \frac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} - \frac{2x-1}{x+1} \geq 0$

Aplicamos el m.c.m. de ambos denominadores: m.c.m.((x-1), (x+1)) = (x - 1)(x + 1)

$\frac{(2x-1)(x+1) - (2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$

$\frac{2x^2+2x-x-1-2x^2+2x+x-1}{(x-1)(x+1)} \geq 0$

$\frac{4x-2}{(x-1)(x+1)} \geq 0$

Calculamos las raíces del numerador y del denominador:

4x - 2 = 0 ⇔ 4x = 2 ⇔ x = 1/2

(x - 1)(x + 1) = 0 ⇔ x - 1 = 0 o x + 1 = 0 ⇔ x = 1 o x = - 1

Estudiamos los signos en los intervalos: (-∞ , - 1) , (- 1 , 1/2) , (1/2 , 1) , (1 , ∞)

- (-∞ , - 1): x = - 2 ⇒ 4x - 2 = - 10 < 0

  ⇒ (x - 1)(x + 1) = ((-2) - 1)((-2) + 1) = 3 > 0

- (-1 , 1/2): x = 0 ⇒ 4x - 2 = - 2 < 0

  ⇒ (x - 1)(x + 1) = - 1 < 0

- (1/2 , 1): x = 3/4 ⇒ 4x - 2 = 4(3/4) - 2 = 3 - 2 = 1 > 0

  ⇒ (x - 1)(x + 1) = (3/4 - 1)(3/4 + 1) = (-1/4)(7/4) = -7/16 < 0

- (1 , ∞): x = 3 ⇒ 4x - 2 = 4·3 - 2 = 10 > 0

  ⇒ (x - 1)(x + 1) = (3 - 1)(3 + 1) = 8 > 0

	(-∞ , - 1)	(-1 , 1/2)	(1/2 , 1)	(1 , ∞)
4x - 2	-	-	+	+
(x - 1)(x + 1)	+	-	-	+
$\frac{4x-2}{(x-1)(x+1)}$	**-**	**+**	**-**	**+**

El conjunto de soluciones es: (-1 , 1/2] ∪ (1 , ∞)